الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية

(بحوث العمليات)

۲۵۸,٤.۳٤ ۱۱_۵ بلمة الطائف حدادة شؤون المكابات المكابة المركزية المائدة المركزية ملاتب 33001000504044

تأليف أكرم محمد عرفان المهتدي جامعة البلقاء التطبيقية

> الطبعة الأولى 2004 م - 1425هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

693020





محتويات الكتاب

| الأولى | الوحدة |
|--------|--------|
|--------|--------|

| غهوم بحوث العمليات ومراحل التحليل الكمي |
|---|
|---|

| 13 | التاريخي | وتطورها | العمليات | بحوث | مفهوم | - |
|----|--------------|---------|----------|------|-------|---|
| - | Ğ | | - | -3 - | 120 | |

- مراحل التحليل الكمى 14

الوحدة الثانية

البرمجة الخطية

| 19 | – مقدمة |
|-----|---------------------------------|
| طية | - خطوات صياغة نموذج البرمجة الخ |
| 22 | - طرق حل مشاكل البرمجة الخطية |
| 22 | - طريقة الرسم البياني |
| 31 | - الطريقة المبسطة |
| 32 | أ- إيجاد الحل الأمثل |
| 49 | ب- المتغيرات الاصطناعية |
| 53 | ج- طريقة M- الكبيرة |
| 70 | د- أسلوب ال حلتين |

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (٢٠٠٤/٢/٢٤)

المهتدي ، أكرم محمد عرفان

الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية/ أكرم محمد عرفان المهتدى - عمان: دار صفاء، ٢٠٠٤.

(7 . .] (737 / 7 / 3 . . 7

الواصفات: / الإدارة // بحوث العمليات/

* تم إعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

حقوق الطبع محفوظة للناشر

Copyright © All rights reserved

الطبعة الأولى 2004 م = 1425 هـ



دأر صفاء للنشر والتوزيم

عمان - شارع السلط - مجمع الفحيص التجاري - هاتف وفاكس ١٩٠٢١٩ ص.ب ٩٢٢٧٦٢ عمان - الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing

Telefax: 4612190 P.O.Box: 922762 Amman - Jordan

http://www.darsafa.com E-mail:safa@darsafa.com

ردمك 1SBN 9957 - 24 - 142 - 0

الوحدة الثالثة

حالات خاصة في البرمجة الخطية

-انحلال العل (التفسخ / التكراري)- 83

| = بحوث العمليات | الفهرس = |
|---|--|
| a free and free miles to a | · - تعدد الحلول المثلى |
| - طرق التعيين أو التخصيص الأمثل | - عدم وجود حلول ممكنة (تعذر الحل) |
| - طريقة العد الكامل (التوافيق) | - عدم توفر حدود |
| | الوحدة الرابعة |
| الوحدة السابعة | النموذج المقابل / النظرية الثنائية |
| شبكات الأعمال | - تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل |
| - مقدمة مقدمة قواعد وأسس بناء شبكات الأعمال | - الحل البياني للنموذج المقابل |
| - التحليل الزمني لشبكات الأعمال | - الطريقة المبسطة لحل النموذج المقابل |
| - طريقة المسار الحرج | الوحدة الخامسة |
| - طريقة تقييم ومراجعة البرامج (بيرت) | مشكلة النقل |
| المراجع | - مقدمة |
| | - طرق الوصول إلى الحل الأولي |
| | - طريقة الركن الشمالي الغربي |
| Ų | - طريقة الكلفة الأقل |
| | - طريقة فوجل التقريبية |
| | - طرق تحسين الحل الأولي |
| | - طريقة المسار المتعرج |
| • | - طريقة عوامل الضرب 146 ······ طريقة عوامل الضرب |
| | الوحدة السادسة |
| | مشكلة التعيين أو التخصيص |

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين وبعد..

فقد تم بعون الله إنجاز الطبعة الأولى من هذا الكتاب الذي يقدم مجموعة من الأساليب والأدوات الكمية المستخدمة في إطار بحوث العمليات بأسلوب واضح ومبسط مدعم بالعديد من الأمثلة المحلولة مع شرح تفصيلي لكافة خطواتها ليتسنى لقارئه فهمهما بسرعة وبدون بدل جهد كبير، فعلم بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي شاع استخدامها في المجالات المتعددة وخاصة في إدارة الأعمال. لهذا فقد جاء كتابنا هذا مشتملا على سبع وحدات مبتدئين بمفهوم بحوث العمليات وتطورها التاريخي ومراحل التحليل الكمي، ثم في الوحدة الثانية ثم تعريف البرمجة الخطية وخطوات صياعتها وطرق حلها وخاصة طريقة الرسم البياني والطريقة المسطة في الوصول إلى الحل الأمثل. أما في الوحدة الثالثة فقد كان التركيز على توضيح حالات خاصة قد تظهر في البرمجة الخطية وكيف يمكن ملاحظتها من خلال الرسم اليياني أو جداول السمبلكس. ثم في الوحدة الرابعة تم التعرض إلى النظرية الثنائية أو النموذج المقابل وأهميته في حل مسائل السمبلكس. أما في الوحدة الخامسة فقد كان التركيز على واحدة من أبرز المشكلات المؤثرة في التكاليف وهي مشاكل نقل السلع أو المواد من مصادرها إلى مراكز عرضها أو بيعها أو تخزينها. ثم في الوحدة السادسة تم معالجة مشكلة التعيين أو التخصيص الأمثل لعناصر الإنتاج. وفي الوحدة السابعة والأخيرة فقد تم عرض شبكات الأعمال كوحدة من أهم وسائل المراقبة على تنفيذ سير العمل ضمن الزمن المخصص أو المحدد له.

وفي الختام نسأل الله أن نكون قد وفقنا في عرض هذا الكتاب تحقيقاً للأهداف المرجوة منه والله من وراء القصد.

الوحدة الأولى مفهوم بحوث العمليات ومراحل التحليل الكمي

مفهوم بحوث العمليات وتطورها التاريخي:

تعتبر الأساليب الكمية أو ما يعرف ببحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة في مجالات متعددة ومنها الإدارة، فهي تعتمد على مجموعة من الطرق والأساليب العلمية التي تساعد متخذ القرار على اختيار القرار الأمثل لحل المشكلة من بين الحلول المتعددة لها. ففي الواقع العملي يكون أمام متخذ القرار اختيارات متمددة من البدائل المكنة لاتخاذ القرار بخصوص مشكلة معينة وهذا يجعل من الصعب عليه اختيار البديل الأمثل دون الاستعانة بأدوات وأساليب كمية تساعده على اتخاذ الضرار الأمثل ومن هذه الأدوات أسلوب البرمجة الخطية وطريقة السمبلكس ونماذج النقل والتخصص وشبكات الأعمال وغيرها. فعلم بحوث العمليات هو عبارة على مجموعة الأدوات والأساليب الكمية المختلفة التي تستخدم للمساعدة في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى لمعالجة المشكلات النابعة من محدودية الموارد لترشيدها وتحقيق الاستخدام الأمثل لها بما يضمن تحقيق أعلى فائدة مادية ممكنة منها. وقد وضعت جمعية بحوث العمليات البريطانية عدة مفاهيم لبحوث العمليات منها "عملية استخدام الأساليب العلمية في حل المشكلات المعقدة الني تنطوي على توظيف أعداد كبيرة من القوى العاملة والمعدات والمواد الأولية في المضانع والمؤسسات الحكومية وفي القوات المسلحة".

يمكن القول بأن البداية الحقيقية لظهور علم بحوث العمليات كان خلال الحرب العالمية الثانية بسبب المجهود الحربي للجيش البريطاني الذي تطلب تعبئة كافة الموارد النادرة بشكل أمثل خلال الحرب ومحاولة تخصيص هذه الموارد بما يخدم كافة العمليات العسكرية دون هدر أو ضياع، حيث استدعت السلطات البريطانية عدداً من الخبراء والعلماء لدراسة معطيات العمليات العمليات العسكرية بهدف تحقيق الاستخدام الأمثل للمعدات والوسائل القتائية المحدودة

2- بناء النموذج الرياضي للمشكلة:

بعد الانتهاء من تحديد المشكلة موضوع القرار وبيان العلاقات المتداخلة في هاريتم وضع المشكلة بصيغة نماذج رياضية تمثل مكونات المشكلة المراد حلها، وتشتمل على متباينة الهدف المطلوب تحقيقه ومتباينات القيود الملازمة للمشكلة التي تحكم الإدارة في اتخاذ القرار.

3- حل النموذج:

بعد صياغة النموذج الرياضي يتم حله لاستخراج النتائج الأولية وتحديد كونه أمثلاً أم لا، فإذا لم يكن كذلك فالأمر يتطلب تطويره حتى الوصول إلى الحل الأمثل لأنه المحقق للأهداف المقترحة.

4-تطبيق الحل:

بعد الوصول إلى الحل الأمثل نظريا يتم تطبيق الحل الأمثل عملياً من خلال مجموعة الإجراءات والتعليمات الذي يقدمها متخذ القرار للعاملين للتقيد بها مراعياً توفر المهارات والمستلزمات الضرورية الني يتطلبها التنفيذ، ثم متابعة التنفيذ للتأكد من أن القرار المتخذ كان فعلاً هو العلاج للمشكلة.

من أجل تحقيق أفضل النتائج العسكرية بأقل خسارة مادية وبشرية ممكنة، وكنتيجة للبحوث التي قدمها هؤلاء الخبراء كسب الحلفاء العديد من المعارك فكانت بذلك الانطلاقة الأولى نحو توجيه مثل هذه البحوث للمجالات غير العسكرية كالاقتصادية والمالية والإدارية وغيرها لمساعدة المدراء في عملية اتخاذ القرارات، فمن أبرز المجالات التطبيقية لبحوث العمليات في الإدارة هي مشكلات المخزون ومشكلات الجون ومشكلات الموارد ومشكلات الإحلال أو الاستبدال ومشكلات المنافسة. ومن الأمور الأساسية التي ساعدت على انتشار تطبيق أساليب بحوث العمليات في المجالات المختلفة هو العمل المستمر للعلماء والباحثين لتطوير أدوات التحليل الكمي واستحداث أساليب ووسائل جديدة، كما كان لظهور الحاسبات الإلكترونية دور بارز في تطور وانتشار الأساليب الكمية من خلال قدرته على حل النماذج الرياضية المعقدة للمشاكل الإدارية الكبيرة.

مراحل التحليل الكمي:

تقوم المنهجية العلمية لبحوث العمليات في عملية اتخاذ القرارات على الخطوات التالية:

ا-تمريف وتحديد المشكلة موضوع القرار:

أي أن يتم تعريف المشكلة الذي سيتخذ القرار فيها لأن ذلك يقود إلى الهدف الذي تسعى الإدارة لتحقيقه. فلو كانت المشكلة إنتاجية تتعلق بخط إنتاجي معين فإن الهدف هو تحديد أفضل كمية إنتاجية ستنجم عن تشغيل هذا الخط بحيث تحقق الشركة أهدافها في الحصول على أعلى ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة. فتحديد وتشخيص المشكلة من المهام الأولى في عملية اتخاذ القرار الإدارى.

الوحدة الثانية البرمجة الخطية

Linear Programming

مقدمة:

البرمجة الخطية هي أحد الأساليب الرياضية المهمة لبحوث العمليات وتعرفُ بأنها أسلوب رياضي يساهم في عملية اتخاذ القرارات الإدارية المتي تهدف إلى إيجاد الحل الأمثل لكيفية توزيع الموارد (البشرية والمادية) المتاحة بين أفضل الاستخدامات ضمن مجموعة من القيود التي تحد من درجة تحقيق هذا الهدف. وتشير كلمة خطية إلى أن العلاقات بين المتغيرات المكونة للمشكلة هي علاقة خطية، أما كلمة برمجة فتشير إلى التكنيك الرياضي المستخدم في إيجاد الحل أي وضع المشكلة بصيفة رياضية أو نموذج رياضي وحلها.

خطوات صياغة نموذج البرمجة الخطية:

لحل أية مشكلة باستخدام البرمجة الخطية يتمين القيام بعدة خطوات تمثل مكونات نموذج البرمجة الخطية وهذه الخطوات هي:

1- تحديد الهدف المنشود من وراء حل المشكلة:

وهناك نوعان من الأهداف للمشكلة المراد حلها بهذا الأسلوب هما تعظيم الأرباح إلى أقصى حد أو تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى،ويصاغ الهدف من وراء حل المشكلة ضمن النموذج الرياضي للمشكلة على شكل دالة خطية تسمى دالة الهدف Objective Function.

2-تحديد القيود Constraints:

وهي مجموعة المحددات التي تحد من درجة تحقيق الأهداف، وعملية تحقيق الهدف تشترط الاستجابة لهذه المتطلبات بشكل جماعي وهنالك ثلاثة أنواع من القيود.

أ-قيد يتضمن أصفر أو يساوي (≥)، وهذا القيد يتضمن حداً أعلى لكميات الموارد المتاح استخدامها لا يجوز تجاوزه.

| أقصى طاقة تشغيلية | م لكل سلعة | الوقت اللازم لكل سلعة | | |
|-------------------|----------------|-----------------------|-----|--|
| | X ₂ | Xi | · | |
| 70 | 5 | 7 | A 🧳 | |
| 105 | 12 | 9 | В | |
| 126 | 3 | 4 | Ċ | |

خطوات صياغة النموذج الرياضي لهذا المثال:

1- تحديد دالة الهدف.

Max. $Z = 25X_1 + 18X_2$

2- تحديد القيود.

أ- القيد الأول (فيد القسم الأول)

إن أقصى طاقة تشغيلية للقسم الأول هـو 70 ساعة أسبوعياً، وحيث أن الجهاز X_1 يحتاج إلى (7) ساعات في القسم A والجهاز X_2 يحتاج إلى (5) ساعات في نفس القسم، بالتالي تكون صياغة القيد الأول كما يلي:

$$7X_1 + 5X_2 \le 70$$

ب- القيد الثاني (قيد القسم الثاني)

 $9X_1 + 12X_2 \le 105$

ج- القيد الثالث (قيد القسم الثالث)

 $4X_1 + 3X_2 \le 126$

3- شرط عدم السالبية.

 X_1 , $X_2 \ge 0$

وقد تحقق هذا الشرط في كافة القيود، لأن قيم X_1 و X_2 جميعها موجبة. ومما تقدم فإن نموذج البرمجة الخطية للمشكلة أعلاه هو:

ب- قيد يتضمن أكبر أو يساوي (≤)، وهذا القيد يتضمن الحد الأدنى الواجب
 تحقيقه.

ج- قيد يتضمن المساواة (=)، وهذا القيد يستوجب تحديد كميات الموارد المتاحة للاستخدام بدقة وبالضبط.

3-شرط عدم السالبية Non - negativity Constraints

ويعني هذا الشرط أن جميع قيم المتغيرات في المشكلة قيد الدرس حقيقية وغير سالبة أي يجب أن تكون القيم موجبة أو صفرية (انظر صفحة 34).

ولتوضيح عملية صياغة نموذج البرمجة الخطية نفترض المثال التالى:

مصنع يقوم بإنتاج نوعين من الأجهزة الكهربائية هما X_2 , X_1 وكل نوع يمر في إنتاجه على ثلاثة أقسام (C, B, A) حيث أقصى طاقة تشغيلية للأقسام الثلاثة هي 70، 105، 126 ساعة إسبوعياً على التوالي. فإذا علمت أن الجهاز الأول X_1 يحتاج إلى 7 ساعات في القسم الثاني و 4 ساعات في القسم الثاني و 4 ساعات في القسم الثانث. والجهاز الثاني X_2 يحتاج إلى 5 ساعات في القسم الأول و 21 ساعة في القسم الثاني و 3 ساعات في القسم الثانث. و 3 ساعات في القسم الثانث. و 18 ساعات في القسم الثانث.

المطلوب:

 X_2 , X_1 ميغة نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل المزيج السلعي من الذي يحقق للمصنع أعلى ربح ممكن ضمن القيود المفروضة.

الحل:

يفضل في البداية وضع معطيات السؤال على هيئة جدول لتسهيل عملية السير في خطوات صياغة النموذج الرياضي المطلوب كما يلي:

وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول المكنة (R) مع ملاحظة أنه:

1- إذا كانت علاقات القيود من نوع أصغر أو يساوي (≥)، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التعظيم، فإن منطقة الحل المكنة يجب أن تكون محدودة من اليمين وباتجاه نقطة الأصل وبالتالي فهي تأخذ شكل المضلع، والحل الأمثل يقع على أحد نقاط زوايا هذا المضلع الأبعد عن نقطة الأصل.

2- إذا كانت علاقات القيود من نوع أكبر أو يساوي (≤) وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التصغير، فإن منطقة الحل الممكن تكون خارج المضلع بدلاً من أن تقع داخله أي أن منطقة الحل الأمثل تكون غير محدودة من اليمين ونقطة الحل الأمثل هي الأقرب إلى نقطة الأصل و

3- إذا كانت علاقات القيود في المشكلة خليط من (≤، ≥) معاً، فإنها تكون مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية بنوعيها التعظيم والتصغير، ولهذه الحالة منطقة حل ممكنة على شكل مضلع.

4- إذا كانت علاقات القيود في المشكلة خليط من (\leq ، \geq ، =) مماً، فإن الاحتمالات المرجعة هي:

أ- وجود قيود تشتمل على متغير واحد بعلاقات مختلطة من (≤، ≥) وقيد آخر يشتمل على متغيرين بعلاقة مساواة، وفي مثل هذه الحالة ليس للمشكلة منطقة حل ممكنة وإنما نقاط حل ممكنة.

ب- وجود قيود تشتمل على أكثر من متغير واحد بعلاقات مختلطة من (≤، ≥) وقيد آخر يشتمل على متغيرين بعلاقة مساواة، وفي مثل هذه الحالة فأن للمشكلة منطقة حل ممكنة.

Max. $Z = 25X_1 + 18X_2$

Subject to,

 $7X_1 + 5X_2 \le 70$

 $9X_1 + 12X_2 \le 105$

 $4X_1 + 3X_2 \le 126$

 $X_1, X_2 \ge 0$

طرق حل مشاكل البر مجة الخطية:

يمكن حل مشاكل البرمجة الخطية بالطرق التالية:

1- طريقة الرسم البياني Graphic Solution

Algebraic Solution حطريقة الحل الجبري -2

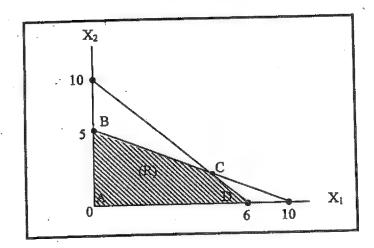
Simplex method الطريقة المسطة 3

طريقة الرسم البياني:

تستخدم هذه الطريقة عندما تحوي المشكلة على متغيرين فقط ويموجبها يتم رصد أحد المتغيرين على المحور الأفقي والآخر على المحور العامودي ثم تمثيل قيود المشكلة على الرسم البياني لتحديد منطقة الحل المكن (R) كخطوة نحو الوصول إلى الحل الأمثل. وعملية تمثيل قيود المشكلة تتم على خطوات هي:

أ- تحويل متباينات القيود إلى معادلات، وعملية التحويل هنده تجعل القيد في صيفة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم.

ب- تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد.



ومنطقة الحل المكن هو المضلع ABCD

4- تحديد الحل الأمثل والذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع. يتم تحديد نقطة الحل الأمثل من بين النقاط الأربعة من خلال:

أ- إيجاد قيم متغيرات النقاط.

ب- اختيار أكبر قيمة بعد تعويضهم في دالة الهدف.

| النقاط | ات النقاط | قيم إحداثي | قيمة دالة الهدف (Z) |
|--------|-----------|------------|---------------------|
| | X1 | X2 | $Z = 6X_1 + 4X_2$ |
| A | 0 | 0 | Z=0 |
| В | 0 | 5 | Z = 20 |
| C. | S | ş | Z=? |
| D | 6 | 0 | Z = 36 |

مثال (1):

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

Max.
$$Z = 6X_1 + 4X_2$$

Subject to,

$$2X_1 + 4X_2 \le 20$$

$$5X_1 + 3X_2 \le 30$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل:

تطبق الخطوات التالية للوصول إلى الحل الأمثل:

1- تحويل متباينات القيود إلى معادلات كما يلي:

$$2X_1 + 4X_2 = 20$$

$$5X_1 + 3X_2 = 30$$

2- تحديد نقاط تقاطع متغيرات القيود مع المحاور كما يلي:

$$2X_1 + 4X_2 = 20$$
(1)

If
$$X_1 = 0 \implies X_2 = 5$$

$$X_2 = 0 \implies X_1 = 10$$

$$5X_1 + 3X_2 = 30$$
(2

If
$$X_1 = 0 \implies X_2 = 10$$

$$X_2 = 0 \implies X_1 = 6$$

3- رسم القيود على الشكل البياني بعد أن تم تحديد نقاط التقاطع وتحديد منطقة الحل المكن كما يلي:

وبمقارنة قيم البدائل الأربعة، نجد أن البديل الأفضل هو عند النقطة C حيث تعطي أكبر قيمة لِ Z.

مِثال2:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البيائي.

Min.
$$Z = 0.75X_1 + 0.85X_2$$

S.T

$$8X_1 + 4X_2 \ge 100$$

$$2X_1 + 4X_2 \ge 70$$

$$2X_1 + 8X_2 \ge 90$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل:

$$8X_1 + 4X_2 = 100$$
(1)

If
$$X_1 = 0$$
 $\Rightarrow X_2 = 25$

$$X_2 = 0 \implies X_1 = 12.5$$

$$2X_1 + 4X_2 = 70$$
(2)

If
$$X_1 = 0 \implies X_2 = 17.5$$

$$X_2 = 0 \implies X_1 = 35$$

$$2X_1 + 8X_2 = 90$$
(3)

If
$$X_1 = 0 \implies X_2 = 11.25$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 45$$

نلاحظ من مضلع منطقة الحلول المكنة أن تحديد قيم إحداثيات النقاط D, B, A يمكن ملاحظتها مباشرة من الرسم، أما النقطة (C) وهي النقطة المتولدة من تقاطع مستقيم القيد الأول مع مستقيم القيد الثاني فلا يمكن تقديرها مباشرة من الرسم، ويتم إيجاد قيم إحداثيات هذه النقطة من خلال حل معادلات المستقيمين المتقاطعين كما يلي:

$$2X_1 + 4X_2 = 20$$
(1)

$$5X_1 + 3X_2 = 30$$
(2)

نضرب المعادلة (1) بـ (3) ونضرب المعادلة (2) بـ (-4) ونجمع المعادلة نضرب المعادلة (1) بـ (-4) ونجمع المعادلة في ال

$$6X_1 + 12X_2 = 60$$
(3)

$$-20X_1 - 12X_2 = -120$$
(4)

$$-14X_1 = -60$$

$$X_1 = \frac{-60}{-14} = 4.3$$

نعوض قيمة X1 في أحد المعادلات لمعرفة قيمة X2.

$$2X_1 + 4X_2 = 20$$

$$2(4.3) + 4X_2 = 20$$

$$8.6 + 4X_2 = 20$$

$$4X_2 = 11.4$$

$$X_2 = 2.9$$

أي أن قيم إحداثيات النقطة C هي (4.3و 4.3)، وبتعويض هذه القيم في معادلة دالة الهدف نحصل على:

$$Z = 6X_1 + 4X_2$$

$$Z = 6(4.3) + 4(2.9)$$

$$Z = 37.4$$

$$8X_1 + 4X_2 = 100$$

$$2X_1 + 4X_2 = 70$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن:

$$X_1 = 5$$

$$X_2 = 15$$

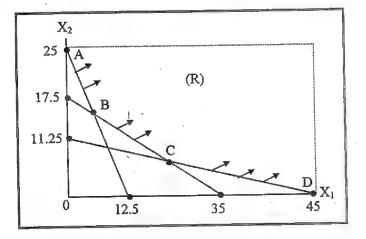
ويتعويض قيم إحداثيات الزوايا الأربعة D, C, B, A في دائمة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي سيتحقق عند النقطة C لأنها أقل تكاليف كما يظهر في الجدول التالي:

| Γ | النقاط | ات النقاط | قيم إحداثيا | قيمة دالة الهدف (Z) |
|---|--------|-------------------------------|-------------|------------------------------|
| 1 | | X ₁ X ₂ | | Min. $Z = 0.75X_1 + 0.85X_2$ |
| ľ | Α | 0 | 25 | Z = 33.75 |
| | В | 5 | 15 | Z = 23 |
| | С | 25 | . 5 | Z = 16.5 |
| | D | 45 | 0 | Z = 21.25 |

مثال 3:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Min Z = 5X_1 + 8X_2$$



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل وذلك لأن المتباينات في هذه المشكلة من نوع أكبر أو يساوي (≤) وبالتالي فإن الحل الأمثل يقع على الحدود الداخلية لهذه المنطقة والبتي يمكن تحديدها بالنقاط ABCD.

حيث إحداثيات النقطة A هي (25، 0)

والنقطة D هي (0، 45)

أما النقاط B و C فلا يمكن تحديد إحداثياتهم مباشرة من الرسمة، الأمر الذي يتطلب استخراجهم من خلال حل المعادلات كما يلي:

♦ النقطة C متولدة من تقاطع مستقيم القيد الثاني والثالث

$$2X_1 + 4X_2 = 70$$

$$2X_1 + 8X_2 = 90$$

وبعد القيام بالحل الجبري نهما، سنجد أن:

$$X_1 = 25$$

$$X_2 = 5$$

وحيث أن القيد الثالث قيد مساواة أي أنه مكتوب بصيغة معادلة وليس متباينة، فإن المساحة تمثل الخط المستقيم نفسه مما يعني عدم وجود منطقة حلول ممكنة إنما نقاط حلول ممكنة وهي النقاط A,D.

| النقاط | \mathbf{x}_{t} | X2 | $Z = 5 X_1 + 8X_2$ |
|--------|------------------|----|--------------------|
| ·A | 0, | 5 | Z=40 |
| D | ? | ? | Z=? |

$$X_1 + X_2 = 5$$

 $X_2 = 2$ وعند النقطة D وعند النقطة

$$\Rightarrow X_1 = 5 - 2 = 3$$

$$\Rightarrow$$
 Z = 5(3) + 8(2)

$$Z = 15 + 16 = 31$$

ولأن المشكلة هي تقليل، فإن الحل الأمثل يتحقق عند النقطة D لان قيمة دالة الهدف أقل.

الطريقة المبسطة Simplex Method:

تعد هذه الطريقة من أهم الطرق المستخدمة في حل مشكلات البرمجة الخطية لكونها تتميز بدرجة عالية من الدقة والكفاءة، كما يمكن استخدامها لأي عدد من المتغيرات والقيود بعكس طريقة الرسم البياني الستي تستخدم فقط عندما تحوي المشكلة على متغيرين فقط.

إن الوصول إلى الحل النهائي الأمثل للمشكلة المتمثلة في تعظيم الهدف أو تصغيره عند استخدام هذه الطريقة يتم على خطوات نظامية متتابعة تبدأ بالحل المكن الأولي (An Initial Basic Feasible solution) مروراً بالحل الأفضل لفاية الوصول إلى الحل الأمثل (Optimal solution).

البرمجة الخطية =

S.T

$$X_1 \le 4$$

$$X_2 \ge 2$$

$$X_1 + X_2 = 5$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل:

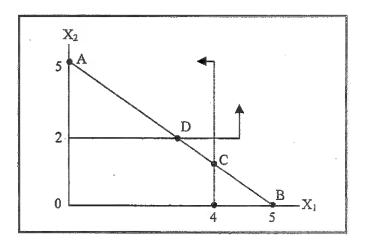
$$X_1 = 4$$
(1)

$$X_2 = 2$$
(2)

$$X_1 + X_2 = 5$$
(3)

If
$$X_1 = 0 \implies X_2 = 5$$

$$X_2 = 0 \implies X_1 = 5$$



 $3X_1 + 4X_2 + S = 12$

وحيث أن الحل الأساسي الأولي يتطلب أن تكون قيم X_1 و X_2 مساوية للصفر في بداية الحل، فإن هذا يعني أن قيمة المتغير الإضافي (S) موجبة تساوي (S) وهذا لم ينافي شرط عدم السلبية.

2- النموذج القياسي للجانب الأيمن من القيود:

إن النموذج القياسي للمشكلة يتطلب أيضاً أن يكون الجانب الأيمن من القيود موجبة أو مساوية للصفر. فإذا كانت سائبة فيجب تحويلها إلى موجبة وذلك بضرب طرفي متباينة القيد بـ (-1) ثم قلب إشارة المتباينة من (\ge) إلى (\le) أو العكس ثم تحويلها إلى الشكل القياسي.

مثال:المتباينة التالية تمثل أحد القيود في مشكلة برمجة خطية:

 $X_1 + 2X_2 \ge -3$

المطلوب: حول هذه المتباينة إلى الشكل القياسي.

الحل:

 $-1[X_1 + 2X_2 \ge -3]$

 $-X_1 - 2X_2 \le 3$

وبالتالي فإن الشكل القياسي هو:

 $-X_1 - 2X_2 + S = 3$

3- النموذج القياسي لدالة الهدف:

أما الشكل القياسي لدالة الهدف فهو دالة الهدف الأصلية مضاف إليها متغيرات راكدة (S) موجبة وبمعاملات صفرية مساوية لعدد القيود في المشكلة قيد الدرس.

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن:

خطوات الوصول إلى الحل الأمثل (تعظيم أو تصغير):

أ- الوصول إلى الحل الأمثل (تعظيم) في ظل شرط المحدودية أصفر أو يساوي ٤٠

الخطوة الأولى: إيجاد النموذج القياسي للمشكلة: أ

وهو يعني تحويل المتباينات الرياضية المعبرة عن المشكلة التي تحتوي على علاقة \geq أو \leq إلى الحالة المستقرة (الشكل القياسي أو النموذج القياسي) وهي الحالة المكتوبة بعلاقة (=).

-1النموذج القياسي للقيود في ظل (\ge) .

إن القيود من نوع أصغر أو يساوي (\ge) تعني أن الجهة اليسرى من متباينة القيد أصغر من الجهة اليمنى، وتحقيق المساواة يتم عن طريق إدخال متغير بإشارة موجبة إلى الجهة اليسرى من المتباينة يساوي الفرق بين الجهة اليمنى واليسرى لها، ويرمز له بالرمز (S). والعلاقة من النوع (\ge) الموجود في القيد تعني أن الكميات المستخدمة من مورد معين لن تزيد عن الكميات المتوفرة أو المتاحة ولكن يمكن أن تقل عنها، وبالمنى الاقتصادي فإن (S) تمثل الكميات غير المستخدمة من الموارد المتاحة لذلك فإنها تسمى متغيرات راكدة (Variables)

مثال: حول متباينة القيد التالي إلى الشكل القياسي:

 $3X_1 + 4X_2 \le 12$

الحل:

حيث أن علاقة المتباينة من نوع (≥)، فهذا يعني أن الجانب الأيسر أصغر من الجانب الأيمن، ولتحقيق المساواة، يتم إضافة المتغير الراكد (S) إلى الجانب الأيسر ليصبح الشكل القياسي للقيد كما يلي:

بعد تحويل متباينات القيود ودالة الهدف إلى الشكل القياسي، يتم تفريع البيانات الواردة في النموذج القياسي في جدول خاص يطلق عليه اسم الجدول البسيط (Simplex table) أو جدول الحل الأساسي الأولي وهو يأخذ النموذج التالى:

| C | • | C ₁ | C ₂ | Cm | 0 | 00 | قيم المتغيرات الأساسية(b) | النسب Ratio |
|-----|-------|-----------------|-----------------|------------------|-------------------------|------------|---|--------------------|
| | | X_1 | | | And in case of the last | S_2 Sn | | |
| 0 | S_1 | an | a ₁₂ | a _{lm} | | | bı | |
| 0 | S_2 | a ₂₁ | a ₂₂ | a ₂ m | | | b ₂ | |
| | | | | | | | * * * * * * * * * * * * * * * * * * * | |
| 0 | S_n | anı | an ₂ | anm | *** | | b_n | |
| Z | | | | | | | -,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,, | قيمة دالة الهدف |
| C-Z | | | | | | | | ائهدف |

وتعتبر عملية المباشرة في الحل ممكنة إذا استوفى هذا الجدول الشرط التالى:

$b_1, b_2 \dots b_n \ge 0$

بمعنى أن قيم جميع المتغيرات الأساسية $S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_n$ غير سالبة لأن وجود قيم سالبة سيخالف شرط اللاسلبية.

الخطوة الثالثة: التحقق من الأمثلية

قد يكون جدول الحل الأساسي الأولي أعلاه أمثلياً أو قد لا يكون، والحكم على هذا الأمريتم من خلال النظر إلى صف (C-Z) الذي يمثل المساهمة الصافية التي تنتج من إضافة وحدة واحدة من المتغير (X) إلى دالة الهدف.وفي

حالة التعظيم التي نحن بصددها، فإذا كانت قيم كافة المعاملات الواردة في هذا الصف صفرية أو سالبة فهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل، أما إذا كانت قيمة أحد المعاملات موجبة، فهذا يعني أن الحل في هذه المرحلة ليس هو الأمثل وهذا يتطلب تحسين أو تطوير الحل.

الخطوة الرابعة:تحسين ألحل:

لأن الهدف هو التعظيم، فإن الحل الأمثل يتحقق كما ذكرنا عندما تكون كافة المعاملات في صف (C-Z)إما صفرية أو سالبة. وغير ذلك يعني عدم تحقق الأمثلية وهذا يتطلب تحسين الحل. وتحسين الحل يتم من خلال اختيار متغير داخل Incoming Variable من بين المتغيرات غير الأساسية X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , من شأنه أن يحقق أكبر مساهمة في دالة الهدف ليحمل محل أحد المتغيرات الأساسية S_1 , S_2 , S_3 , S_4 ويسمى المتغير غير الأساسي الذي سيدخل بالمتغير الداخل والمتغير الأساسي الذي يخرج فيسمى بالمتغير الخارج Outgoing أن تطوير الحل يتطلب إدخال متغيرات غير أساسية وإخراج متغيرات أساسية.

كيف يتم تحديد المتغير الداخل؟

إن المتغير غير الأساسي الذي سيدخل العل هو ذلك المتغير الذي يرتبط بصف (C-Z) بأكبر قيمة موجبة، ويسمى العمود الواقع فيه هذا المتغير بالعمود المحوري (Pivot column).

كيف يتم تحديد المتغير الخارج؟

إن المتغير الخارج هو المتغير الذي له أصغر ناتج موجب من حاصل قسمة قيم المتغيرات الأساسية b_1 , b_2 , ..., b_n على القيم المناظرة لها في العمود المحوري. مع إهمال المتغيرات ذات القيم السالبة أو الصفرية، ويسمى الصف الذي يقع فيه المتغير الخارج بالصف المحوري (Pivot row).

 $9X_1 + 6X_2 \le 4500$

 $3X_1 + 3X_2 \le 1800$

 $X_1, X_2 \ge 0$

الحل:

الخطوة الأولى: إيجاد النموذج القياسي للمشكلة:

إن النموذج القياسي لدالة الهدف والقيود هو كما يلي:

Max.
$$Z = 30X_1 + 36X_2 + OS_1 + OS_2 + OS_3$$

S.T

$$6X_1 + 9X_2 + 1S_1 + OS_2 + OS_3 = 4500$$

$$9X_1 + 6X_2 + OS_1 + 1S_2 + OS_3 = 4500$$

$$3X_1 + 3X_2 + OS_1 + OS_2 + 1S_3 = 1800$$

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولى ممكن:

ويتم ذلك بتفريغ فيم المتغيرات الواردة في الشكل القياسي للمشكلة في جدول الحل الأساسى الأولى كما يلى:

| C | | 30 | 36 | 0 | 0 | 0 | |
|---|----------------|----|-------|----|-------|----------------|------|
| | | Χι | X_2 | Si | S_2 | S ₃ | Ъ |
| 0 | S_1 | 6 | 9 | 1 | 0 | 0 | 4500 |
| 0 | \mathbb{S}_2 | 9 | 6 | 0 | 1 | 0 | 4500 |
| 0 | S ₃ | 3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1800 |
| Z | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | Z | 30 | 36 | 0 | 0 | 0 | |

وبعد تحديد العمود المحوري والصف المحوري فإن العنصر الذي يتقاطع عنده المحورين يسمى بالعنصر المحوري (Pivot element).

الخطوة الخامسة: إجراء عمليات حسابية لإيجاد حل أساسي جديد يحسن من قيمة دالة الهدف.

إن هذه الخطوة تتطلب القيام بعدة خطوات متتابعة وهذه الخطوات هي:

- 1- تقسيم عناصر الصف المحوري على العنصر المحوري لتحديد قيم المتغير الداخل، وتسمى القيم الجديدة المتولدة عن القسمة بمعادلة المحور (Pivot).
- 2- استخراج القيم الجديدة للمتغيرات الأساسية S1, S2, ...Sn الني لم تخرج. تتم هذه الخطوة على كافة قيم المتغيرات الأساسية وفق المعادلة التالية:

X قيم القيد S الجديدة = قيم القيد S القديمة - [معامل المتغير الداخل S في القيد S] [معادلة المحور].

3- استخراج القيم الجديدة لـ Z.

وسيتم توضيح هذه الخطوة من خلال المثال الرقمي اللاحق.

4- استخراج قيم C-Z الجديدة.

بعد استخراج قيم (C-Z) الجديدة، ننظر إلى هذه القيم، فإذا كانت جميعها صفرية أو سالبة نكون بذلك قد توصلنا إلى الحل الأمثل لحالة التعظيم.

مثال: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخراج طريقة السمبلكس:

Max.
$$Z = 30X_1 + 36X_2$$

S.T

$$6X_1 + 9X_2 \le 4500$$

$$\left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{9}, 0, 0, 500\right] [6] - \left[9, 6, 0, 1, 0, 4500\right] =$$

$$\left[.4, 6, \frac{2}{3}, 0, 0, 3000\right] - \left[9, 6, 0, 1, 0, 4500\right] =$$

$$\left[5, 0, -\frac{2}{3}, 1, 0, 1500\right] =$$

$$S_3$$
 القديمة $-[$ معامل المتغير الداخل X_2 في القيد S_3 [معادلة المحور] S_3 الجديدة S_3 القديمة S_3 [$\frac{2}{3}$ ،1 ، $\frac{1}{9}$ ،0 ،0 ،500] S_3 [S_3] S_3 [S_3] S_3 [S_3] S_3] S_3 [S_3] S_3] S_3 [S_3

وبعد معرفة قيم المتغير الداخل والقيم الجديدة لكل من S_3 , S_2 يتم تفريع هذه القيم في جدول حل أساسي جديد ليظهر لنا كما يلي:

| С | | 30 | 36 | 0 | 0 | 0 | |
|----|----------------|-------|------------------|-------|-------|----------------|------|
| | | X_1 | X ₂ _ | S_1 | S_2 | S ₃ | ь |
| 36 | X ₂ | 2/3 | . 1 | 1/9 | 0 | 0 | 500 |
| 0 | S ₂ | 5 | 0 | -2/3 | 1 | 0 | 1500 |
| 0 | S ₃ | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 1 | 300 |
| Z | | ? | ? | .? | ? | ? | ? |
| C- | C-Z | | ? | ? | ? | ? | |

♦ قيم ∑الجديدة:

$$(36)(2/3) + (0)(5) + (0)(1) = 24$$

الخطوة الثالثة: التحقق من الأمثلية:

عند النظر إلى جدول الحل الأساسي الأولي المكن في الخطوة السابق نجد أن القيم في صف (C-Z) ليست صفرية أو سالبة كما يشترط الحل الأمثل في حالة التعظيم وإنما صفرية وموجبة الأمر الذي يتطلب تحسين الحل. فالقيم 30 و 36 في صف C-Z تمني أن إضافة وحدة من X إلى دالية الهدف وإضافة وحده من Xإلى الدالة أيضاً ستزيد الهدف (الأرباح مثلاً) بمقدار 30 و 36 ديناراً على التوالي.

الخطوة الرابعة: تحسين الحل:

يتطلب هذا الأمر تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج والعنصر المحوري للوصول إلى المعادلة المحورية.

- المتغير الداخل هو X2 لأن له أكبر قيمة موجبة في صف C-Z.
- المتغير الخارج هو S1 لأن له أصغر قيمة بعد قسمة قيم المتغيرات الأساسية على القيم المناظرة لها في العمود المحوري

والعنصر المحوري هو العدد (9) حيث تقاطع عنده العامود المحوري مع الصف المحوري.

الخطوة الخامسة:إيجاد حل أساسي جديد:

أي استخراج قيم المتغير الداخل (معادلة المحور) والقيم الجديدة لكل من المتغيرات الأساسية S3, S2 التي لم تخرج ولكلٍ من C-Z, Z

* قيم المتغير الداخل (معادلة المحور) هي:

6/9, 9/9, 1/9, 0, 0, 500

♦ قيم S₃, S₂الجديدة:

[المعادلة المحور] القديمة S_2 القديمة S_2 المعادلة المحور] المعادلة المحور] المعادلة المحور]

تحسيق الحل:

- المتغير الداخل هو X_1 لأن له أكبر قيمة موجبة في صف (C-Z).
- المتغير الخارج هو S_2 أو S_3 لأن لهما أصفر ناتج متساوي من حاصل قسمة المتغيرات الأساسية على القيم المناظرة لها في العمود المحوري.

واختيار أيّ منهما لا يؤثر على النتيجة، فلو اعتبرنا المتغير الأساسي الخارج هو S، فإن العنصر المحوري سيكون العدد (1) كما هو ظاهر في الجدول السابق وبالتالي فإن المعادلة المحورية هي:-

| | 2 | 30 | 36 | 0 | 0 | 0 | |
|----|----------------|-------|----------------|------|----------------|----------------|-----|
| | | X_1 | X ₂ | Sı | S ₂ | S ₃ | b |
| 36 | X ₂ | | | | | | |
| 0 | S ₂ | | | | | | |
| 30 | X_{l} | 1 | 0 | -1/3 | 0.4 | N1: | 300 |

وبعد تحديد العنصر المحوري والمعادلة المحورية يجب استخراج قيم X_2 الجديدة وكذلك قيم Z وقيم C-Z الجديدة كما يلي:

قيم X_2 الجديدة = القديمة -[معامل المتغير الداخل X_1 المقابل القيد X_2 [المعادلة المحورية] $[1,0,\frac{-1}{3},0,1,300]$ $[\frac{2}{3}]$ $[\frac{2}{3},1,\frac{1}{9},0,0,500]$ = $\left[\frac{2}{3}, 0, \frac{-2}{9}, 0, \frac{2}{3}, 200\right] - \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{9}, 0, 0, 500\right] =$ $[0,1,\frac{1}{3},0,\frac{-2}{3},300] =$

$$(36)(1) + (0)(0) + (0)(0) = 36$$

$$(36)(500) + (0)(1500) + (0)(300) = 18000$$

$$30 - 24 = 6$$

$$0 - 4 = -4$$

$$0 - 0 = 0$$

$$0 - 0 = 0$$

وبالتالي فإن جدول الحل الأساسى الجديد هو:

| | · | 20 | 36 | 0 | 0 | 0 | | |
|-----|----------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| С | | 30 | | U | | | | D .: |
| | | X_{t} | X_2 | S_1 | S_2 | S_3 | b | Ratio |
| 36 | X ₂ | 2/3 | 1 | 1/9 | 0 | 0 | 500 | 750 |
| O | S ₂ | .5 | 0 | -2/3 | 1 | 0 | 1500 | 300 |
| 0 | S_3 | 0 | 0 | -1/3 | 0 | 1 | 300 | 300 |
| Z | | 24 | 36 | 4 | 0 | 0 | 18000 | |
| C-Z | | 6 | 0 | -4 | 0 | 0 | | |

وعند النظر إلى صف (C-Z) نجد قيمة موجبة تحت عمود المتغير غير الأساسي X1 وهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل الذي يشترط أن تكون وحيث أن كافة المعاملات في صنف (C-Z) صفرية أو سالبة فقد تحقق الحل الأمثل والمتمثل في إنتاج 300 وحدة من X_1 و 300 وحدة من X_2 واستخدام كامل ما هو متوفر من S_2 .

ب- الوصول إلى الحل الأمشل (تصفير) في ظل شرط المحدودية أصغر أو يساوي ≥.

الخطوة الأولى:

1- تحويل دالة الهدف من تصغير إلى تعظيم.

2- التأكد من أن فيم المتغيرات في الجانب الأيمن من القيود أكبر من صغر أي أيست سالبة.

3- تحويل المتباينات إلى الشكل القياسي.

الخطوة الثانية:

إيجاد حل أساسي أولي ممكن وذلك بتفريغ قيم المتغيرات الواردة في الشكل القياسي للمتباينات (الهدف والقيود) في الجدول البسيط.

الخطوة الثالثة: "التحقق من الأمثلية".

وسنوضح خطوات الوصول إلى الحل الأمثل (تصغير) في ظل شرط المحدودية أصفر أو يساوي (≥) من خلال المثاني التالي:

مثال (1):

ليكن لدينًا نموذج البرمجة الخطية التالية:

Min.
$$Z = X_2 - 3X_3 + 2X_5$$

S.T

$$3X_2 - X_3 + 3X_5 \le 7$$

$$-2X_2 + 4X_3 \le 12$$

قيم S_2 الجديدة = القديمة -[معامل المتغير الداخل X_1 المقابل القيد S_2 [المعادلة المحورية] S_2 الجديدة = القديمة -[معامل المتغير الداخل X_1 المقابل القيد S_2 المعادلة المحورية] = S_2 المعادلة المحورية] = S_3 المعادلة المحورية] = S_4 المعادلة المحورية] = S_5 المعادلة المعادلة المحورية] = S_5 المعادلة المحورية] = S_5 المعادلة المعادلة المحورية] = S_5 المعادلة المعادلة المحورية] = S_5 المعادلة المحورية] = S_5 المعادلة المعادلة

وبعد تفريغ القيم الجديدة له X_2 و S_2 في جدول الحل الأساسي يظهر لنا كما يلي:

| Ī | | | 30 | 36 | 0 | 0 | 0 | |
|---|----------|----------------|----------------|-------|-------|----------------|----------------|-----|
| | <u>_</u> | | X ₁ | X_2 | S_1 | S ₂ | S ₃ | b |
| | 36 | X_2 | 0 | 1 | 1/3 | 0 | -2/3 | 300 |
| | 0 | S ₂ | 0 | 0 | 1 | 1 | - 5 | 0 |
| | 30 | Xı | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 1 | 300 |

بعد ذلك نستخرج القيم الجديدة لكل من (Z) و (C-Z) ليظهر لنا جدول الحل النهائي التالي:

| C | 2 | 30 | 36 | 0 | 0 | 0 | |
|----|----------------|-------|----------------|-------|-------|----------------|-------|
| | | X_1 | X ₂ | S_1 | S_2 | S ₃ | Ъ |
| 36 | X ₂ | 0 | 1 | 1/3 | 0 | -2/3 | 300 |
| 0 | S ₂ | 0 | 0 | 1 | 1 | -5 | 0 |
| 30 | X_1 | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 1 | 300 |
| 7 | Z | 30 | 36 | 2 | 0 | 6 | 19800 |
| C- | ·Z | 0 | 0 | -2 | 0 | -6 | |

| | | | | | | | | - | | |
|-----|----------------|----------------|----------------|----|----|----------------|----------------|----|-------|---------|
| С | | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | | X ₂ | X ₃ | X5 | Sı | S ₂ | S ₃ | ь | Ratio | |
| 0 | S_{i} | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | -7 | |
| 0 | S_2 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 | 13 | خارج_ــ |
| 0 | S ₃ | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 | 10/3 | |
| Z | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| C-2 | Z | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | | | |
| - | | | داخا. | | | | | | | |

وحيث أن الهدف هو التعظيم بعد تحويل دالة الهدف من تصغير إلى تعظيم، فإن شرط الوصول إلى الحل الأمثل هو أن تكون كافة القيم في صف C-Z صفرية أو سائبة، إلا أننا نلاحظ وجود قيم موجبة تحت عمود المتغير غير الأساسي X3 وهذا يعني أننا لم نتوصل إلى الحل الأمثل، ووجود هذا المتغير الداخل الموجب يعني إمكانية تحسين الحل. ولتحسين الحل علينا تحديد المتغير الداخل والخارج لتحديد العنصر المحوري وبالتالي المعادلة المحورية.

- → X3 هو المتغير الداخل.
- → S2 هو المتغير الخارج.
- \rightarrow العدد (4) هو العنصر المحوري.
 - → المادلة المحورية هي:

$$\left[\frac{-2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{0}{4}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{0}{4}, \frac{12}{4}\right]$$

$$-4X_2 + 3X_3 + 8X_5 \le 10$$
$$X_2, X_3, X_5 \ge 0$$

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة المسطة.

الحل:

الخطوة الأولى:

١- تحويل دالة الهدف من تصغير إلى تعظيم كما يلى:

Max.
$$Z' = (-Z) = -X_2 + 3X_3 - 2X_5$$

- 2- التأكد من أن قيم المتغيرات في الجانب الأيمن من القيود أكبر من صفر أي ليست سالبة وهي كذلك. أي أن شرط عدم السالبية قد تحقق.
 - 3- تحويل المتباينات إلى الشكل القياسي كما يلي:

Max.
$$Z'=-X_2+3X_3-2X_5+0S_1+0S_2+0S_3$$

 $3X_2-X_3+2X_5+S_1+0S_2+0S_3=7$
 $-2X_2+4X_3+0X_5+0S_1+S_2+0S_3=13$
 $-4X_2+3X_3+8X_5+0S_1+0S_2+S_3=10$

الخطوة الثانية "إيجاد حل أساسي أولي ممكن".

ويتم ذلك بتفريغ بيانات النموذج القياسي للمشكلة في الجدول البسيط لاستخراج قيم (Z) وقيم (C-Z) كما يظهر في الجدول التالي:

| | С | -1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|----------------|----------------|----------------|----|----|----------------|----------------|-----|------------------------|
| | | X ₂ | X ₃ | X5 | Si | S ₂ | S ₃ | b | Ratio |
| 0 | S_1 | | | | | 618 Z 44 S | | 100 | |
| 3 | X ₃ | | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 3 | -6 تهمل |
| 0 | S ₃ | 2.5 | 0 | 8 | 0 | <u>-3</u> | 1 | 1 | <u>-2</u> 5 ئهمل |
| · | Z | | 3 | 0 | 0 | 3 4 | 0 | 9 | |
| | C-Z | | 0 | -2 | 0 | $\frac{-3}{4}$ | 0 | | |

بعد استخراج قيم C-Z نلاحظ بأنها ليست جميعها صفرية أو سالبة أي أننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل، ووجود قيمة موجبة $(\frac{1}{2})$ تحت عمود المتغير X_2 في صف (C-Z) يعني أن فرصة تحسين الحل لا تزال قائمة.

- → X2 هو المتغير الداخل.
- \rightarrow S₁ هو المتغير الخارج.
- → العدد (2.5) هو العنصر المحوري.
 - ← المعادلة المحورية هي:

$$[1.0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, 0.4]$$

 \cdot قيم X_3 الجديدة هي \leftarrow

$$[0.1, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, 0.5]$$

| C | 1 | -1 | - 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | |
|-----|----------------|----------------|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|
| | | X_2 | X_3 | X ₅ | S ₁ | S ₂ | S ₃ | b |
| 0 | Sı | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
| 3 | X ₃ | $\frac{-1}{2}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 3 |
| 0 | S ₃ | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
| - 2 | 7 | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
| C | diam' | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |

أما قيم S₁ و S₃ الجديدة فهي:

 $S_1 = S_1$ القديمة - (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_1) (المعادلة المحورية)

$$\left[\frac{-1}{2},1,0,0,\frac{1}{4},0,3\right][-1]-[3,-1,2,1,0,0,7]=$$

$$\left[\frac{1}{2}, -1, 0, 0, \frac{-1}{4}, 0, -3\right] - \left[3, -1, 2, 1, 0, 0, 7\right] =$$

$$[2.5, 0, 2, 1, \frac{1}{4}, 0, 10] =$$

(المادلة المحورية) ($S_3 = S_3$ القديمة - (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_3

$$\left[\frac{-1}{2}, 1, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 3\right] \left[3\right] - \left[-4, 3, 8, 0, 0, 1, 10\right] =$$

$$\left[\frac{-3}{2}, 3, 0, 0, \frac{3}{4}, 0, 9\right] - \left[-4, 3, 8, 0, 0, 1, 10\right] =$$

$$\left[\frac{-5}{2}, 0.8, 0.\frac{-3}{4}, 1.1\right] =$$

Z وبعد تفريخ قيم S_1 و S_2 الجديدة في الجدول السابق نستخرج فيم S_1 الجديدة وقيم C-Z للتحقق من أمثلية الحل.

$$\Rightarrow \text{Max.} Z' = (-Z) = -X_2 + 3X_3 - 2X_5$$

$$= -4 + (3) (5) - (2)(0)$$

$$= 11 \text{ or } Z_{\text{min.}} = -11$$

ج- الوصول إلى الحل الأمثل (تعظيم) في ظل شرط المحدودية أكبر او يساوى (≤).

الخطوة الأولى: إيجاد النموذج القياسي للمشكلة:

وهو يعني كما ذكرنا سابقا تحويل المتباينات الرياضية المعبرة عن المشكلة التي تحتوي على علامة ≤ أو ≥ إلى الحالة المستقرة (الشكل القياسي) وهي الحالية المكتوبة بعلاقة (=).

1- النموذج القياسي للقيو دفي ظل (≤)

إن القيد من نوع أكبر أو يساوي (\leq) يعني أن الجهة اليسرى للمتباينة أكبر من الجهة اليمنى. وبالتالي فإن تحقيق المساواة ممكن عن طريق إدخال متغير بإشارة سالبة إلى الجهة اليسرى من المتباينة يساوي الفرق بين الجهتين يرمز له بالرمز (S-) ويسمى بالمتغير الإضافي (الفائض) لأنه يمثل الزيادة على المستوى المطلوب.

مثال: حول متباينة القيد التالي إلى الشكل القياسي

$$3X_1 + 4X_2 \ge 12$$

الحل:

حيث أن علاقة المتباينة من نوع (≤) فهذا يعني أن الجانب الأيسر أكبر من الجانب الأيمن، ولتحقيق المساواة يتم إضافة متغير إضافي بإشارة سالبة إلى الجهة اليسرى كما يلي:

$$3X_1 + 4X_2 - S = 12$$

 \rightarrow قيم S_3 الجديدة هي :

$$[0.0.10.1.\frac{-1}{2}.1.11]$$

وبعد تفريغ قيم معادلة المحور وقيم X_3 الجديدة و S_3 الجديدة في جدول حل أساسي جديد نستخرج قيم (Z) الجديدة وقيم (C-Z) الجديدة لنتحقق من أمثلية الحل كما يلي:

| . C | | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | |
|-----|------------------|------------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|-----|
| | | . X ₂ | X ₃ | X_5 | S_1 | S ₂ | S ₃ | ь |
| -1 | X ₂ | 1 | 0 | 4/5 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | 0 | 4 · |
| 3 | X ₃ | 0 | 1 | $\frac{2}{5}$ | 1/5 | $\frac{3}{10}$ | 0 | 5 |
| 0 | S ₃ . | 0 | 0 | 10 | 1 | $\frac{-1}{2}$ | 1 | 11 |
| Z | | -1 | 3 | $\frac{2}{5}$ | 1/5 | 1/2 | 0 | 11 |
| C- | Z | 0 | 0 | -12 5 | <u>-1</u> 5 | $\frac{-1}{2}$ | . 0 | |

بعد استخراج قيم Z الجديدة وقيم (C-Z) نجد أن كافة القيم في صف C-Z صفرية وسالبة وليس هناك أي قيمة موجبة وهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل حيث:

$$X_2 = 4$$

$$X_3 = 5$$

$$X_5 = 0$$

وبالتالي فإن شرط اللاسلبية قد تحقق.

3- النموذج القياسي للجانب الأيمن من القيود:

إن الجانب الأيمن للقيود (الثوابت) يجب أن تكون موجبة، فإذا كانت سالبة يجب تحويلها إلى موجبة ويتم ذلك حسب الاحتمالات التالية:

أ- إذا كان اتجاه المتباينة من نوع أقل أو يساوي ≥.

يضرب طرفي المعادلة بـ (-1) ثم تقلب إشارة المتراجعة من (\geq) أي (\leq) ثم يتم تحويلها إلى الشكل القياسي.

مثال: حول المتباينة التالية إلى الشكل القياسي

$$X_1 + 2X_2 \le -4$$

الحل:

 $-1 (X_1 + 2X_2 \le -4)$

 $-X_1 - 2X_2 \ge 4$

والشكل القياسى لها هو:

 $-X_1 - 2X_2 - S + R = 4$

ب- إذا كان اتجاه المتباينة من نوع أكبر أو يساوي ≤.

يضرب طرفي المعادلة بـ (-1) ثم تقلب إشارة المتراجمة من (\leq) إلى (\geq) ثم تحول إلى الشكل القياسي.

مثال: حول المتباينة التالية إلى الشكل القياسي

 $5X_1 - 2X_2 \ge -7$

الحل:

 $-1 [5X_1 - 2X_2 \ge -7]$

وحيث أن الحل الأساسي الأولي يتطلب أن تكون قيم X_2 , X_1 مساوية للصفر في بداية الحل، فإن هذا يعني:

$$3(0) + 4(0) - S = 12$$

$$-S = 20$$

$$S = -30$$

أي أن قيمة المتفير الإضافي سالبة وهذا سينافي شرط عدم السلبية للمتغيرات وبالتائي تعذر الحصول على حل أولي ممكن، ومن أجل علاج ذلك يتم إضافة متغير آخر يسمى بالمتغير الاصطناعي (R) لتحقيق شرط عدم السلبية للمتغيرات، أي أن الشكل القياسي لهذا القيد هو كما يلي:

$$3X_1 + 4X_2 - S + R = 12$$

فعند بداية الحل حيث قيم S, X2, Xi مساوية للصفر فإن قيمة المتغير الاصطناعي R ستكون موجبة مساوية (12) وبالتائي فإن شرط اللاسلبية قد تحقق.

2- النموذج القياسي للقيد من نوع (=)

يعالج القيد من نوع (=) ليأخذ الشكل القياسي بإضافة متغير اصطناعي يرمز له بالرمز (R) فقط ويحقق في نفس الوقت شرط اللاسلبية.

مثال: حول القيد التالي إلى الشكل القياسي:

$$3X_1 + 4X_2 = 12$$

الحل:

$$3X_1 + 4X_2 + R = 12$$

وحيث أن الحل الأساسي الأولي يتطلب أن تكون قيم X₁, X₁ مساوية للصفر في بداية الحل، فإن هذا يعني أن:

R = 12

 $-5X_1 + 2X_2 \le 7$

والشكل القياسي لها هو:

 $-5X_1 + 2X_2 + S = 7$

ج- إذا كان القيد عبارة عن معادلة رياضية طرفها الأيمن سالب، يتم ضربها ب(1-1) ثم تحول إلى الشكل القياسي:

مثال: حول المتباينة التالية إلى الشكل القياسي

$$-X_1 + 3X_2 = -8$$

الحل:

$$-1 (-X_1 + 3X_2 = -8)$$

$$X_1 - 3X_2 = 8$$

والشكل القياسي لها هو:

$$X_1 - 3X_2 + R = 8$$

الله ملاحظة

إن أي قيد لا يحتوي على متغير راكد (S + i, S - i) يجب أن يضاف إليه متغير اصطناعي (R) للحصول على مصفوفة الوحدة لنتمكن من الحصول على حل أولي ممكن يحقق شرط اللاسلبية.

4- الشكل القياسي لدالة الهدف في ظل القيود (≤، =)

بعد تحويل القيود إلى الشكل القياسي في ظل القيود (≤، =) من خلال إضافة متغيرات اصطناعية (R)، والتأكد من أن قيم الجانب الأيمن للقيود (الثوابت) موجبة، يجب تحويل دالة الهدف إلى الشكل القياسي أيضاً مع

ملاحظة أن هنالك أسلوبين يتم بموجبهما حل نموذج البرمجة الخطية الذي يحتوي على متغيرات اصطناعية هما:

The Big M-method الكبيرة -M - الكبيرة

The Two - phase Method اسلوب المرحلتين -2

أسلوب M - الكبيرة The Big M-method:

يقوم هذا الأسلوب على أساس إضافة معامل كبير جداً لكل متغير اصطناعي في دالة الهدف، ويرمز لهذا المعامل بالرمز (M)، وهو:

1- يحمل إشارة سالبة في حالة التعظيم.

2- يحمل إشارة موجبة في حالة التقليل.

مع ملاحظة أن شرط الأمثلية في حالة التعظيم هو أن تكون جميع القيم في صف (C-Z) إما صفرية أو سائبة أما في حالة التقليل فجميع القيم في صف (C-Z) يجب أن تكون صفرية أو موجبة.

مثال1: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية مستخدماً طريقة M- الكبيرة.

Max. $Z = 3X_1 - X_2$

S.T

 $2X_1 + X_2 \le 2$

 $X_1 + 3X_2 \ge 3$

 $X_2 \le 4$

 $X_1, X_2 \ge 0$

| (| | 3 | -1 | 0 | 0 | 0 | -M | | |
|----|----------------|-------|----------------|----|----------------|----------------|----|-----|-------|
| | | Xi | X_2 | Sı | S ₂ | S ₃ | Ri | b | Ratio |
| 0 | S ₁ | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| -M | R_1 | 1 | 3 | -0 | i lir | 0: | -1 | 3. | 1 |
| 0 | S ₃ | 0 | 1.1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 4 |
| 7 | 7. | -M | : 3 M : | 0 | M | 0 | -M | -3M | |
| C | -Z | 3 + M | 1+3M | 0 | -M | 0 | 0 | | |

نلاحظ بعد استخراج قيم C-Z وجود قيم موجبة هي (M, 3M) وهنذا يعني أن الحل الأولي ليس أمثلاً وأنه يمكن تحسين الحل.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل

لتحسين الحل علينا تحديد المتغير الداخل والخارج، وكما نلاحظ من الجدول السابق، فإن المتغير الداخل هو (X_2) والخارج هو (R_1) وبالتائي فإن العنصر المحوري هو (3) والمعادلة المحورية هي:

| $S_{\mathbf{i}}$ | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
|------------------|---------------|---|---|----------------|---|---|
| X ₂ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | $\frac{-1}{3}$ | 0 | 1 |
| S_3 | ? | ? | ? | ? | ? | ? |

ثم علينا استخراج قيم Sl الجديدة و S3 الجديدة.

 $S_1 = S_1$ القديمة - (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_1) (المعادلة المحورية)

$$(\frac{1}{3}, 1, 0, \frac{-1}{3}, 0, 1)$$
 (1) - (2, 1, 1, 0, 0, 2) =

$$(\frac{5}{3}, 0, 1, \frac{1}{3}, 0, 1) =$$

 S_3 القديمة - (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_3 (المعادلة المحورية)

الحل:

الخطوة الأولى: وضع دالة الهدف والقيود في الشكل القياسي:

$$2X_1 + X_2 + S_1 = 2$$

$$X_1 + 3X_2 - S_2 + R_1 = 3$$

$$0X_1 + X_2 + S_3 = 4$$

وللوصول إلى مصفوفة الوحدة، فإن طريقة السمبلكس تتطلب في حال ظهور متفير في أحد المعادلات أن يظهر في كافة المعادلات، والمتغيرات التي ظهرت في المعادلات أعلاه هي $(X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, R_1)$

$$2X_1 + X_2 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0R_1 = 2$$

$$X_1 + 3X_2 + 0S_1 - S_2 + 0S_3 + R_1 = 3$$

$$0X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 + 0R_1 = 4$$

وبالتالى فإن الشكل القياسي لدال الهدف هو:

Max,
$$Z = 3X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - MR_1$$

وكما نلاحظ فإنه تم إضافة معامل كبير (M) وإشارة سالبة إلى دالة الهدف لأن هدف هذه المشكلة هو التعظيم.

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن

بعد تحويل المتباينات (الهدف والقيود) إلى الشكل القياسي، يتم تفريغ البيانات في حدول الحل الأولي كما يلي:

| X_1 | 1 | 0 | 3 5 | 1 5 | 0 | 3 5 |
|----------------|---|---|--------|--------|---|--------|
| X ₂ | ? | ? | . ? | ? | ? | ? |
| S ₃ | ? | ? | ? | ? | ? | ? |

وقيم S₃, X₂ الجديدة هي:

$$[1 : 0 : \frac{3}{5} : \frac{1}{5} : 0 : \frac{3}{5}] [\frac{1}{3}] - [\frac{1}{3} : 1 : 0 : \frac{-1}{3} : 0 : 1] = X_2$$

$$[0 : 1 : \frac{-1}{5} : \frac{-2}{5} : 0 : \frac{4}{5}] =$$

$$[1 : 0 : \frac{3}{5} : \frac{1}{5} : 0 : \frac{3}{5}] [\frac{-1}{3}] - [\frac{-1}{3} : 0 : 0 : \frac{1}{3} : 1 : 3] =$$

$$[0 : 0 : \frac{1}{5} : \frac{2}{5} : 1 : \frac{16}{5}] =$$

وبعد تفريع قيم المعادلة المحورية وقيم X_2 الجديدة و S_3 الجديدة في جدول حل جديد نستخرج قيم Z الجديدة وقيم Z الجديدة ليظهر لنا كما يلي:

| | 2 | 3 | -1 | 0 | 0 | 0 | |
|----|----------------|----------------|-------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| | | X ₁ | X_2 | S_1 | S ₂ | S ₃ | b |
| 3 | X ₁ | 1 | 0 | <u>3</u> 5 | <u>1</u> 5 | 0 | 3 5 |
| -1 | X ₂ | 0 | 1 | <u>-1</u> 5 | <u>-2</u> 5 | 0 | <u>4</u> 5 |
| 0 | S ₃ | 0 | 0 · | 1 5 | <u>2</u> 5 | 1 | 16 5 |
| 7 | Z | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| C- | -Z | 0 | 0 | -2 | -1 | 0 | |

$$(\frac{1}{3}, 1, 0, \frac{-1}{3}, 0, 1)$$
 $(1) - (0, 1, 0, 0, 1, 4) =$ $(\frac{-1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 1, 3) =$

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم S_1 و S_1 الجديدة في جدول حل جديد نستخرج قيم Z الجديدة وقيم Z الجديدة ليظهر لنا كما يلى:

| (| 2 | 3 | -1 | 0 | 0 | 0 | | |
|----|----------------|------------------|----------------|----|----------------|----------------|----|------------|
| | | X ₁ | X ₂ | Sı | S ₂ | S ₃ | Ъ | Ratio |
| 0 | S_1 | (5) (3) | 0 | | 1=1 - 3 | 0 | | 3 5 |
| -1 | X ₂ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | $\frac{-1}{3}$ | 0 | 1 | 3 |
| 0 | S ₃ | #117 | 0 | 0 | 1/3 | 1 | 3 | 9- يهمل |
| 2 | Z | 2-11.5 3 | -1 | 0 | 1/3 | 0 | -1 | |
| C | -Z | . <u>10</u> 3 | 0 | 0 | $\frac{-1}{3}$ | 0 | | |

وعند النظر إلى قيم صف C-Z نجد أن شرط الأمثلية في حالة التعظيم لم يتحقق بعد لوجود قيمة موجبة، علماً بأن القيمة الموجبة تعني أن فرصة زيادة الهدف ممكنة من خلال تحسين الحل.

 X_1 كما نلاحظ من الجدول أعلام، فإن العنصر الداخل هو X_1 والخارج هو X_1 والعنصر المحوري هو $\frac{5}{3}$ وبالتالي فإن المعادلة المحورية هي:

$$X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + R_1 + 0R_2 = 9$$

$$2X_1 + X_2 - S_1 + 0S_2 + 0R_1 + R_2 = 12$$

$$X_1 + 3X_2 + 0S_1 + S_2 + 0R_1 + 0R_2 = 3$$

$$Z = 3X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1 - MR_2$$

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن

| C | 7 | 3 | 5 | 0 | 0 | -M | -M | | |
|----|----------------|--------|----------------|-----|----------------|-----|----------------|------|-------|
| | | Xi | X ₂ | Sı | S ₂ | Rı | R ₂ | b | Ratio |
| -M | R ₁ | | 3) | - 0 | 0 | 17° | 0 | 9 | 3 |
| -M | R ₂ | 2 | 11. | -1 | 0 | 0 | 1 | 12 | 12 |
| 0 | S ₂ | 1 | =3:1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | -1 |
| | | 4 | | | | | | | يهمل |
| 7 | Z | -3M | **-4M/s | M | 0 | -M | -M | -21M | |
| C | -Z | 3 + 3M | 5+4M | -M | 0 | 0 | 0 | | |

نلاحظ في صف C-Z وجود قيم موجبة، وهذا يعني أن الحل الأولي ليس أمثلا الأمر الذي يتطلب تحسين الحل.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل:

:X2: المتغير الداخل.

R1: المتغير الخارج.

العدد 3: العنصر المحوري.

⇒ المعادلة المحورية هي:

وعند استعراض كافة قيم صف (C-Z) نجد بأنها صفرية أو سائبة وهذا يعنى إننا توصلنا إلى الحل الأمثل حيث:

$$Z=1$$
 , $X_2=\frac{4}{5}$, $X_1=\frac{3}{5}$

وللتأكد من صحة الحل، نموض قيم X2, X1 في دالة الهدف كما يلي:

Max.
$$Z = 3X_1 - X_2$$

= $3(\frac{3}{5}) - \frac{4}{5}$
= $\frac{9}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$

Max. Z = 1

مثال2: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية مستخدما طريقة M- الكبيرة.

Max.
$$Z = 3X_1 + 5X_2$$

S.T

$$X_1 + 3X_2 = 9$$

$$2X_1 + X_2 \ge 12$$

$$X_1 - 3X_2 \le 3$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل:

الخطوة الأولى: تحويل المتباينات إلى الشكل القياسي:

$$X_1 + 3X_2 + R_1 = 9$$

$$2X_1 + X_2 - S_1 + R_2 = 12$$

وحيث لا تزال هناك قيمة موجبة في صف C-Z، فإن إمكانية تحسين العل لا تزال قائمة حيث:-

X_i X_i: المتغير الداخل.

R2: المتغير الخارج.

 $\frac{5}{3}$: العنصر المحوري.

⇒ المادلة المحورية هي:

| | - X ₁ | X ₂ | S_1 | S_2 | b |
|----------------|------------------|----------------|-----------|-------|---------|
| X2 | ? | ? | ? | ? | ? |
| X_i | 1 | 0 | <u>-3</u> | 0 | 27 5 |
| S ₂ | ? | ? | ? | ? | ? |

أما قيم S2, X2 الجديدة فهي:

(المعادلة المحورية) ($X_2 = X_2$ القديمة - (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد $X_2 = X_2$

$$(1.0, \frac{-3}{5}, 0.5.4)(\frac{1}{3}) - (\frac{1}{3}, 1.0, 0.3) =$$

$$(\frac{1}{3}, 0.\frac{-3}{15}, 0.\frac{27}{15}) - (\frac{1}{3}, 1.0, 0.3) =$$

$$(0.1, \frac{1}{5}, 0.\frac{6}{5}) =$$

 S_2 القديمة - (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_2 (المعادلة المحورية)

$$(1.0, \frac{-3}{5}, 0.5.4) (2) - (2.0, 0.1, 12) =$$

$$(2.0, \frac{-6}{5}, 0.10.8) - (2.00, 1.12) =$$

$$(0.0, \frac{6}{5}, 1.\frac{6}{5}) =$$

| | Xı | X ₂ | S_1 | S ₂ | R_2 | b |
|----------------|---------------|----------------|-------|----------------|-------|---|
| X_2 | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| R ₂ | ? | ? | ? | ? - | ? | ? |
| S_2 | ? | ? | ?: | ? | ? | ? |

أما قيم R2 الجديدة و S2 الجديدة فهي:

(المادلة المحورية) $R_2 = R_2$ الجديدة $R_2 = R_2$ الجديدة R_2 الجديدة المحورية)

$$(\frac{1}{3}, 1, 0, 0, 0, 3)$$
 (1) $-(2, 1, -1, 0, 1, 12) =$
 $(\frac{5}{2}, 0, -1, 0, 1, 9) =$

(المعادئة المحورية) S_2 القديمة – (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_2

وعند تفريغ قيم معادلة المحور وقيم R_2 وقيم معادلة المحور وقيم حلاء المحديد قيم C-Z وقيم C وقيم C

| C | 5 | 3 | 5 | 0 | 0 | -M | | |
|-----|----------------|--------------------|----------------|-----|----------------|----------------|-------|-------|
| | | Xı | X ₂ | Sı | S ₂ | R ₂ | ь | Ratio |
| 5 | X_2 | 1 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 9 |
| -M | R ₂ | 5 3 | .0 | -1 | O | 1 | -9 | 5.4 |
| 0 | S ₂ | 2 | 0 | . 0 | 1 | 0 | 12 | 0 |
| 2 | Z | 5 5 m 34 3 | 5 | М | 0 | -M | 15-9M | |
| C-Z | | $\frac{4+5}{3+3}m$ | 0 | -M | 0 | 0 | | |

وقيم X2 الجديدة هي:

$$(0.0.1.\frac{5}{6}.1)(\frac{1}{5}) - (0.1.\frac{1}{5}.0.\frac{6}{5})$$

$$(0.1.0.\frac{1}{6}.1)$$

.وقيم X₁ الجديدة هي:

$$(0.0.1.\frac{5}{6}.1)(\frac{-3}{5})-(1.0.\frac{-3}{5}.0.\frac{27}{5})$$

$$(1,0,0,\frac{1}{2},6) =$$

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم X_2 الجديدة و X_1 الجديدة نستخرج قيم X_2 وقيم X_3 ونتحقق من الأمثلية:

| · C | | 3 | 5 | 0 | 0 | |
|-----|----------------|---|----------------|----------|----------------|-----|
| | | | X ₂ | Sı | S ₂ | b . |
| 5 | X ₂ | 0 | 1 | 0 | $\frac{-1}{6}$ | 1 |
| 3 | X ₁ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 6 |
| 0 | Sı | 0 | 0 | <u>5</u> | 1 | |
| 2 | Z | | 5 | 0 | <u>2</u> 5 | 23 |
| С | C-Z | | 0 | 0 | $\frac{-2}{3}$ | |

وحيث أن كافة القيم في صف C-Z إما صفرية أو سالبة فهذا يعني إننا توصلنا إلى الحل الأمثل حيث:

وبعد تفريخ قيم معادلة المحور وقيم X_2 الجديدة نستخرج قيم C-Z وقيم C-Z وقيم C-Z لنتحقق من الأمثلية كما يلي:

| C | 3 | 3 | 5 | 0 | 0 | | |
|-----|----------------|---------|----------------|-----------|------------------|----------------|-------|
| | | X_1 | X ₂ | Sı | S ₂ · | b | Ratio |
| 5 | X ₂ | 0 | . 1 | 1 35 | 0 | <u>6</u> 5 | 6 |
| 3 | X_1 | 1 | 0 | <u> </u> | 0 | <u>27</u> 5 | تهمل |
| 0 | S_2 | i di di | 0 | | 4.1 | 6 ₹ | 1 |
| 2 | Z | 3 | 5 | #4 5 | 0 | 22.2 | |
| C-Z | | 0 | 0 | 4. 3 | 0 | | |

وحيث لا تزال توجد قيمة موجبة في صف C-Z فإن الأمثلية لم تتحقق بعد وبالتال لا يزال تطوير الحل ممكناً:

حيث:

التغير الداخل. S:

S2: المتغير الخارج.

 $\frac{6}{5}$: العنصر المحوري.

⇒ المادلة المحورية هي:

| X ₂ | ? | ? | ? | ? | ? |
|----------------|---|---|---|---------------|---|
| X_1 | ? | ? | ? | ? | ? |
| Sı | 0 | 0 | 1 | <u>5</u> 6 | 1 |

$$X_1 + X_2 - S_2 + R_2 = 350$$

$$2X_1 + X_2 + S_3 = 600$$

 $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, R_1,$ إن المتغيرات التي ظهرت في المعادلات أعلاه هي (R_2) وللوصول إلى مصفوفة الوحدة، فإن هذه المتغيرات جميعها يجب أن تظهر في كافة المعادلات كما يلى:

$$X_1 + 0X_2 - S_1 + 0S_2 + 0S_3 + R_1 + 0R_2 = 125$$

 $X_1 + X_2 + 0S_1 - S_2 + 0S_3 + 0R_1 + R_2 = 350$

$$2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 + 0R_1 + 0R_2 = 600$$

وبالتألي فإن الشكل القياسي لدالة الهدف مو:

Min.
$$Z = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2$$

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن:

ويتم ذلك من خلال تفريغ المادلات القياسية للقيود ودالة الهدف في جدول الحل الأولي لاستخراج قيم Z وقيم C-Z للتحقق من شرط الأمثلية كما يلي:

| | С | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | M | М | |
|---|----------------|------|-------|----|----------------|-------|-------|----------------|------|
| | | Xi | X_2 | Sı | S ₂ | S_3 | R_1 | R ₂ | b |
| M | R ₁ | | 0∠ | 1. | 0 | 0 | ì | 0 | 125 |
| M | R ₂ | 14. | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 350 |
| 0 | S ₃ | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 ' | 0 | 600 |
| | Z | 2M | M | -M | -M | 0 | M | M | 475M |
| (| C-Z | 2-2M | 3-M | M | М | 0 | 0 | 0 | |

$$X_1 = 6$$

$$X_2 = 1$$

$$Z = 23$$

نلاحظ بأن الحل الأمثل قد تحقق بعد التخلص من المتغيرات الاصطناعية R_2 , R_1 في عمود المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأولي المكن في الخطوة الثانية.

د- الوصول إلى الحل الأمثل (تصغير) في ظل شرط المحدودية أكبر أو يساوي (≤).

إن خطوات الوصل إلى الحل الأمثل (تصغير) في ظل شرط المحدودية أكبر أو يساوي لا يختلف عن خطوات الوصول إلى الحل الأمثل (تعظيم) في ظل شرط أكبر أو يساوي أو في ظل شرط أقل أو يساوي والمثال التالي يوضح هذه الخطوات:

مثال: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية مستخدما طريقة السمبلكس.

Min.
$$Z_1 = 2X_1 + 3X_2$$

S.T

$$X_1 \ge 125$$

$$X_1 + X_2 \ge 350$$

$$2X_1 + X_2 \le 600$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل:

الخطوة الأولي: تحويل المتباينات إلى الشكل القياسي:

$$X_1 - S_1 + R_1 = 125$$

| | С | 2 | 3 | 0 | .,0 | 0 | M | | |
|---|----------------|----------------|-----|------|----------------|----------------|-------|-------------|--------|
| | | X ₁ | X2 | Sı | S ₂ | S ₃ | R_2 | ь | Ratio |
| 2 | X_1 | 1 | 0. | | 0 - | 0 | 0 | 125 | تهمل ﴿ |
| M | R ₂ | 0 | 1 | | | 0 | 1 | 225 | 225 |
| 0 | S ₃ | ð.Ö | | (2) | 0. | | 0 : | 350- | 175 |
| | Z | 2 | M | -2+M | M | 0 | М | 250+ 22 | 25M |
| C | -Z | 0 | 3-M | 2 M | M | 0 | 0 | | |

عند النظر إلى صف C-Z نجد قيم سالبة (M, -M)، أي أن شرط الأمثلية لم يتحقق بعد الأمر الذي يتطلب تحسين الحل كما يلي:

S1 المتغير الداخل.

S₃ المتغير الخارج.

العدد (2) هو العنصر المحوري.

⇒ المعادلة المحورية هي:

| X, | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
|----------------|---|-----|---|---|---|-----|
| R ₂ | ? | ? . | ? | ? | ? | ? |
| Sı | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 175 |
| | | 2 | | | 2 | |

قيم X1 الجديدة هي:

$$(0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, 175) (1) - (1, 0, -1, 0, 0, 125)$$

$$(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 300) =$$

عند النظر إلى قيم صف C-Z نجد قيم سالبة (M-, -2M, -M) علماً بأن شرط الأمثلية في حالة التصغير هو أن تكون كافة قيم هذا الصف صفرية أو موجبة، وعليه فإن الحل الأولى هذا ليس أمثلا:

الخطوة الثالثة: تحسين الحل:

في حالة التصغير، المتغير الداخل هو المتغير ألذي له أكبر قيمة سالبة وبالتالى فإن:

X1 هو المتغير الداخل.

R₁ هو المتفير الخارج.

العنصر المحوري هو العدد (1)

⇒ المعادلة المحورية هي:

| , | X_1 | X_2 | S_1 | S_2 | S_3 | R_2 | b |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| · X ₁ | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 125 |
| R_2 | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
| S ₃ | ? | ? | ?. | ? | ? | ? | ? |

أما قيم R2 الجديدة و S3 الجديدة فهي:

العادلة المحورية (العادلة المحارية - R_2 القديمة - (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد R_2

$$= (1.0.1, 0.0.1, 0.0.1) - (1.1.0.1, 0.0.1, 0.350)$$

$$(0,1,1,-1,0,1,225) =$$

(المعادلة المحورية) S_3 القديمة - (معامل المتنير الداخل المقابل للقيد S_3 (المعادلة المحورية)

$$(0.1.2.0.1.0.350) =$$

وبعد تفريع قيم المعادلة المحورية وقيم R₂ الجديدة و S₃ الجديدة في جدول حديد نستخرج قيم Z وقيم C-Z كما يظهر في الجدول التالي:

 $\frac{1}{2}$ والعنصر المحوري هو العدد

المادلة المحورية هي:

| X_1 | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
|-------|---|---|---|----|----|-----|
| X_2 | 0 | 1 | 0 | -2 | -1 | 100 |
| Sı | ? | ? | ? | ? | ? | ? |

أما قيم X الجديدة و S الجديدة فهي:

| Xı | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 250 |
|----|---|---|---|---|---|-----|
| Sı | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 125 |

وبعد تقريع قيم المعادلة المحورية وقيم X_i الجديدة و S_1 الجديدة في جدول حل جديد تظهر لنا قيم Z وقيم Z كما في الجدول التالي:

| Ċ | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|-----|----------------|----|-------|-----|----------------|----------------|-----|
| | | Xį | X_2 | Sı | \mathbb{S}_2 | S ₃ | ь |
| 2 | X_{l} | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 250 |
| 3 | X ₂ | 0 | 1 | 0 | -2 | -1 | 100 |
| 0 | S_1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 125 |
| Z | | 2 | 3 | 0 | -4 | -1 | 800 |
| C-Z | | 0 | 0 | . 0 | 4 | 1 | , |

وحيث أن كافة القيم في صف (C-Z) أما صفرية أو موجبة فهذا يعني أننا توصلنا إلى الحلُ الأمثل بحيث:

$$X_1 = 250$$

قيم R2 الجديدة هي:

$$(0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, 175)$$
 $(1) - (0, 1, 1, -1, 0, 225)$

$$(1,\frac{1}{2},0,-1,-\frac{1}{2},50) =$$

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم X_1 الجديدة وقيم R_2 الجديدة في جدول حل جديد، تظهر لنا قيم Z وقيم Z كما في الجدول التالي:

| | С | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|----------------|---------|------------------------|-----|----------------|-------------------|------------|-------|
| | | X_{l} | X ₂ | \$1 | S ₂ | S ₃ | ь | Ratio |
| 2 | Xı | 1 | 12.2 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 300 | 600 |
| М | R ₂ | 0 | | 0 | i-i | 1 2 | 50 | 100 |
| 0 | S_1 | 0 | <u>(1)</u> 2 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 175 | 350 |
| Z | | 2 | r+ [™] M 2 | 0 | -M | $1-\frac{1}{2}M$ | 600 + 50 M | |
| C | C-Z | 0 | $2-\frac{1}{2}M$ | 0 | М | $-1+\frac{1}{2}M$ | | |

وحيث لا تزال هناك قيمة سالبة في صف C-Z فإن الحل ليس أمثلاً، ولتحسين الحل فإن:

X2 هو المتغير الداخل.

R2 المتغير الخارج.

وهو الأسلوب الثاني الذي يستخدم في حل نماذج البرمجة الخطية الذي يحتوي على متغيرات اصطناعية.

إن الحصول على الحل الأمثل باستخدام هذا الأسلوب يتم على مرحلتين هما:

المرحلة الأولى:

- آ- تكوين دالة هدف جديدة أو مصطنعة يرمز لها بالرمز (w) وهي عبارة عن
 مجموع المتغيرات الاصطناعية المضافة إلى القيود في شكلها القياسي.
- 2- إيجاد أصغر قيمة لهذه الدالة (Min. w) بغض النظر عن هدف المشكلة الأصلية.
 - 3- إن قيود دالة الهدف الجديدة (w) هي نفس قيود دالة الهدف الأصلية.
 - 4-وضع المتباينات (دالة الهدف الجديدة وقيود المشكلة) بالشكل القياسي.
- 5- تفريخ دالة الهدف الجديدة والقيود بعد تحويلهم إلى الشكل القياسي في جدول الحل الأولى.
 - 6- استخراج قيمة (Z).
 - 7- استخراج قيمة C-Z.
- 8- التحقق من الأمثلية لهذا الحل الأولي الذي يشترط أن تكون كافة القيم في صف C-Z صفرية أو موجبة مضاف إلى ذلك عدم ظهور متغيرات اصطناعية في عمود المتغيرات الأساسية. فإذا تحققت الأمثلية يتم الانتقال إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

1- في هذه المرحلة نأخذ جدول الحل الذي حقق شرط الأمثلية في المرحلة الأولى ونستبدل معاملات دالة الهدف المصطنعة (w) بمعاملات دالة الهدف المصطنعة .

والمستبدل معاملات دالة الهدف المصطنعة (w) المعاملات دالة الهدف المصلنعة الأصلية.

2- نستخرج قيم Z وقيم C-Z.

3- نتحقق من الأمثلية حيث:

أ- في حالة التعظيم، فإن كافة القيم في صف C-Z سالبة أو صفرية. ب- في حالة التصغير، فإن كافة القيم في صف C-Z موجبة أو صفرية. مثال:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية مستخدماً أسلوب المرحلتين:

Max. $Z = 5X_1 - 4X_2 + 3X_3$

S.T

$$2X_1 + X_2 - 6X_3 = 20$$

 $6X_1 + 5X_2 + 10X_3 \le 76$
 $8X_1 - 3\dot{X}_2 + 6X_3 \le 50$
 $X_1, X_2, X_3 \ge 0$

الحل:

المرحلة الأولى: إن الخطوة الأولى في هذه المرحلة هي تحويل فيود هذه المشكلة إلى الشكل القياسي لتحديد عدد المتغيرات الاصطناعية لتكوين دالة الهدف الاصطناعية (w).

$$2X_1 + X_2 - 6X_3 + R = 20$$

 $6X_1 + 5X_2 + 10X_3 + S_1 = 76$
 $8X_1 - 3X_1 + 6X_3 + S_2 = 50$

عند النظر إلى قيم صف C-Z نجد قيم سالبة وهذا يمني أن الحل الأولي ليس أمثلاً، فشرط الأمثلية أن تكون كافة القيم صفرية أو موجبة لأن الهدف في

الدالة المصطنعة هو التصغير. الأمر الذي يتطلب تحسين الحل.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل:

Xt هو المتغير الداخل لأن له أكبر قيمة سالبة.

S2 هو المتغير الخارج لان له أصغر فيمة.

العنصر المحوري هو العدد (8).

⇒ المعادلة المحورية هي :

| R | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
|-------|---|----------------|---------------|---|-----|---|----------------|
| S_1 | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
| Xı | 1 | $\frac{-3}{8}$ | <u>6</u> 8 | 0 | 1/8 | 0 | <u>50</u> 8 |

أما قيم R الجديدة فهى:

R = R القديمة – (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد R) (المعادلة المحورية) R = R المعادلة المحورية) R = R (1 ، $\frac{-3}{8}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{50}{8}$) (2) – (2 ، 1 ، 6 ، 0 ، 0 ، 1 ، 20) = $(0, \frac{7}{4}, \frac{-15}{2}, 0, \frac{-1}{4}, 1, \frac{15}{2}) = R$

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم R الجديدة و S_1 الجديدة في جدول حل جديد تظهر لنا قيم Z وقيم Z كما في الجدول التالى:

⇒ دالة الهدف الاصطناعية هي:

Min. w = R

لوجود متفير اصطناعي واحد في القيود.

وحيث أن المتغيرات التي ظهرت في القيود هي (X1, X2, X3, S1, S2, R) فإن هذه المتغيرات جميعها يجب أن تظهر في كافعة المعادلات للوصول إلى مصفوفة الوحدة كما يلى:

$$2X_1 + X_2 - 6X_3 + 0S_1 + 0S_2 + R = 20$$

$$6X_1 + 5X_2 - 10X_3 + S_1 + 0S_2 + 0R = 76$$

$$8X_1 - 3X_2 + 6X_3 + 0S_1 + S_2 + 0R = 50$$

وبالتالي فإن الشكل القياسي لدالة الهدف المصطنعة هو:

Min.
$$w = 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0S_1 + 0S_2 + R$$

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن:

بعد تحويل المتباينات (الهدف والقيود) إلى الشكل القياسي يتم تفريغ البيانات في جدول حل أولي كما يلي:

| | С | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
|---|----------------|-------|----------------|-------|-------|----------------|---|----|
| | | X_1 | X ₂ | X_3 | S_1 | S ₂ | R | ь |
| 1 | R | 2 | 1 | -6 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| 0 | S_1 | 6 | 5 | 10 | 1 | 0 | 0 | 76 |
| 0 | S ₂ | (8) | -3 | 6 - | 0.5 | | 0 | 50 |
| | Z | 2 | . 1 | -6 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| (| C-Z | -2 | -1 | 6 | 0 | 0 | 0 | |

وبعد تفريغ قيم معادلة المحور وقيم S_1 الجديدة وقيم X_1 الجديدة في جدول حل جديد تظهر لنا قيم Z وقيم C-Z كما في الجدول التالي:

| (| С | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
|---|-----------------|----|----------------|-----------------|----|----------------|---------------------------|----------------|
| | | Xı | X ₂ | X ₃ | Sı | S_2 | R | b |
| 0 | X_2 | 0 | 1 | $\frac{-30}{7}$ | 0 | $\frac{-1}{7}$ | 4 7 | 30 7 |
| 0 | Sı | 0 | 0 | 256 7 | 1 | $\frac{2}{7}$ | $\frac{-29}{7}$ | <u>52</u> 7 |
| 0 | X ₁ | 1 | 0 | $\frac{-6}{7}$ | 0 | 1/14 | 3 14 | 55 7 |
| | Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | C- Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

وحيث أن كافة القيم في صف (C-Z) صفرية أو موجبة ولم يعد في عمود المتغيرات الأساسية متغيرات اصطناعية فهذا يعني الوصول إلى الحل الأمثل لدالة الهدف المصطنعة (w) وانتهاء المرحلة الأولى للانتقال إلى المرحلة الثانية. المرحلة الثانية:

نأخذ في هذه المرحلة جدول الحل أعلاه الذي حقق شرط الأمثلية ونستبدل

| | C | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
|---|----------------|-------|----------------|-----------------|-------|----------------|----|----------------|
| | | X_1 | X ₂ | X_3 | S_1 | S_2 | R | b |
| 1 | R | 0 | | | σ, | | 1. | 15 72° |
| 0 | S_1 | 0 | 29 4 | $\frac{11}{2}$ | 1 | $\frac{-3}{4}$ | 0 | 77 2 |
| 0 | X ₁ | 1 | <u>-3</u> 8 | <u>6</u> 8 | 0 | 1 8 | 0 | <u>50</u> 8 |
| | Z | 0 | 4 | $\frac{-15}{2}$ | 0 | $\frac{-1}{4}$ | 1 | 15 2 |
| (| C-Z | 0 | =7 -4 | $\frac{15}{2}$ | 0 | +1 4 | 0 | |

ولوجود قيمة سالبة في صف C-Z فإن هذا الحل ليس أمثلاً الأمر الذي يتطلب تحسين الحل ثانية. ولتحسين الحل فإن:

X2 هو المتغير الداخل.-

R هو المتغير الخارج.

 $\frac{7}{4}$ - العنصر المحوري هو العدد

⇒ المعادلة المحورية هي:

| X ₂ | 0 | 1 | $\frac{-30}{7}$ | 0 | $\frac{-1}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{30}{7}$ |
|----------------|---|---|-----------------|---|----------------|---------------|----------------|
| S_1 | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
| X | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |

أوجد الحل الأمثل لنساذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

-1

Max. $Z = 12X_1 + 9X_2$

S.T

$$8X_1 + 4X_2 \le 240$$

$$15X_1 + 10X_2 \le 450$$

$$9X_1 + 6X_2 \le 360$$

$$X_1 + X_2 \ge 20$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Max. $Z = 3X_1 + 2X_2$

S.T

$$'X_1 \leq 4$$

$$X_2 \le 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \ge 18$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

معاملات دائة الهدف المصطنعة (w) بمعاملات دائة الهدف الأصلية ثمم نستخرج قيم Z وقيم C-Z ونتحقق من الأمثلية كما يلي:

| | С | 5 | -4 | 3 | 0 | 0 | ь |
|-----|----------------|-------|----------------|-----------------|-------|----------------|----------------|
| | • | X_1 | X ₂ | X ₃ | S_1 | S ₂ | |
| -4 | X ₂ | 0 | 1 | <u>-30</u> 7 | 0 | $\frac{-1}{7}$ | 30 7 |
| 0 | Sı | 0 | 0 | 256 7 | 1 | $\frac{2}{7}$ | . <u>52</u> 7 |
| 5 | Xı | 1 | 0 | $\frac{-6}{7}$ | 0 | 1/14 | <u>55</u> 7 |
| | Z | 5 | -4 | 90 7 | 0 | 13 14 | 155 7 |
| · c | C-Z | 0 | 0 | $\frac{-69}{7}$ | 0 | <u>-13</u> | |

وحيث أن كافة القيم في صف C-Z صفرية أو سالبة فهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل حيث:

$$X_1 = \frac{55}{7}$$

$$X_2 = \frac{30}{7}$$

$$X_3 = 0$$

Max.
$$Z = \frac{155}{7}$$

السؤال الثاني:

ليكن لدينا نماذج البرمجة الخطية التالية:

-1

Min.
$$Z = X_1 - 3X_2 + 3X_3$$

S.T

$$3X_1 - X_2 + 2X_3 \le 7$$

$$2X_1 + 4X_2 \ge -12$$

$$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \le 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Max.
$$Z = 5X_1 - 4X_2 + 3X_3$$

S.T

$$2X_1 + X_2 - 6X_3 = 20$$

$$6X_1 + 5X_2 + 10X_3 \le 76$$

$$8X_1 - 3X_2 + 6X_3 \le 50$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Max.
$$Z = 2X_1 + 1X_2 + 4X_3 + 2X_4 + 1X_5$$

S.T

$$4X_1 + 1X_2 + 1.5X_3 + 4X_4 \le 150$$

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 + 2X_4 + 7X_5 \le 180$$

Max.
$$Z = 7X_1 + 2X_2$$

S.T

$$X_1 + X_2 = 100$$

$$X_2 \le 55$$

$$2X_1 + X_2 \le 180$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Min.
$$Z = 1.2X_1 + 1.9X_2$$

S.T

$$X_1 + 3X_2 \ge 90$$

$$5X_1 + X_2 \ge 100$$

$$3X_1 + 2X_2 \ge 120$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Min.
$$Z = 20X_1 + 10X_2$$

$$X_1 + 2X_2 \le 40$$

$$3X_1 + X_2 \ge 30$$

$$4X_1 + 3X_2 \ge 60$$

$$X_1$$
, $X_2 \ge 0$

الوحدة الثالثة

حالات خاصة في البرمجة الخطية

البربحة اكخطية

$$2X_2 + 2X_3 + 2X_5 \le 120$$

 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \ge 0$

المطلوب:

إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة المسطة.

السؤال الثالث:

أوجد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التائية مستخدماً أسلوب المرحلتين:

-

Min.
$$Z = 3X_1 + 5X_2$$

S.T

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 = 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \ge 18$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Min. $Z = X_1 + 3X_2$

$$X_1 + X_2 \ge 4$$

$$2X_1+X_2 \leq 6$$

$$X_2 = 3$$

$$X_1$$
, $X_2 \ge 0$

حالات خاصة في البرمجة الخطية:

في مجرى البحث عن الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية تظهر حالات خاصة تنجم عن عدم الدقة في صياغة النماذج الرياضية أو في تحديد الموامل المؤثرة على المسألة موضوع البحث ومن أهم هذه الحالات:

1- انحلال الحل (التفكك / التفسخ / التكرار) Degeneracy.

2-تعدد الحلول المثلى Alternate optimal solution.

3- عدم وجود حلول ممكنة (تعذر الحل)Infeasible solution.

4- عدم توفر حدود Unbounded solution.

1- انحلال الحل:

أ- بالرسم البياني:

يظهر انحلال الحل بالرسم البياني عند وجود قيد فائض غير ذي أهمية لا يؤثر على تحديد منطقة الحل المكنة.

مثال:

Max.
$$Z = 5X_1 + 10X_2$$

S.T

$$X_1 + 3X_2 \le 6$$

$$2X_1 + 2X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2 \ge$$

وعند تمثيل هذه المشكلة بالرسم البياني تظهر لنا كما يلى:

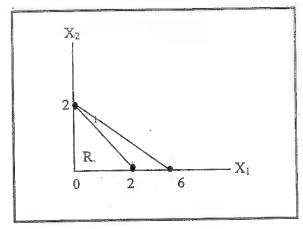
﴿ وَقُلِ أَعْلُواْ فَسَيَرَى أَلَّهُ عَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَلَلُوْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية (بحوث العمليات)

| | 3 | 5 | 10 | 0 | 0 | | |
|----|-------|-------|----------------|-------|----------------|---|-------------------|
| | | X_1 | X ₂ | S_1 | S ₂ | ь | Ratio |
| 0 | Sı | 1 | 3 | I | 0 | 6 | <u>6</u> = 2 |
| 0 | S_2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 4 | $\frac{4}{2} = 2$ |
| Z | | 0 | 0 | . 0 | 0 | 0 | |
| C- | Z | 5 | 10 | 0 | 0 | | |

| (| 3 | 5 | 10 | 0 | 0 | |
|-----|----------------|----------------------------|-------|-----------------|-------|----|
| | | Xi | X_2 | Sı | S_2 | ь |
| 10 | X ₂ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 1/3 | 0 | 2 |
| 0 | S ₂ | $\left(\frac{4}{3}\right)$ | 0 | <u>-2</u> 3 | 1 | 0 |
| . 2 | 3 | 10 3 | 10 | 10 3 | 0 | 20 |
| C- | -Z | 5 3 | 0 | <u>-10</u> 3 | 0 | , |



نلاحظ هنا بأن القيد الأول خارج منطقة الحلول المكنة (R)، وبالتالي فإن هذا القيد هو قيد فائض يجب استبعاده لعدم تأثيره على الحل.

ب- بطريقة السمبلكس:

مثال:

يظهر انحلال الحل بطريقة السمبلكس عند الوصول إلى حل في مرحلة من المراحل وقد ظهر لنا أكثر من متغير خارج في نفس الجولة والذي يعني ظهور أكثر من عنصر محوري عند استخدام قاعدة أقل النسب لتحديد الصف المحوري، والسبب في تعدد العناصر المحورية نابع من وجود قيد أو أكثر فائض ولأنه لا يمكن إخراج أكثر من متغير في الجولة الواحدة من الحل لتطويره فإن قيمة باقي المتغيرات الأساسية (b) ستصبح مساوية للصفر في الجولات التالية الأمر الذي يعني ظهور انحلال في الحل يتمثل في عدم تحسن قيمة دالة الهدف.

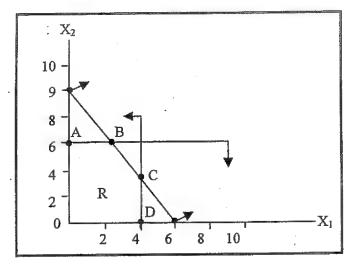
Max.
$$Z = 5X_1 + 10X_2$$

$$X_1 + 3X_2 \le 6$$

$$2X_1 + 2X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$





X1 ولرسم دالة الهدف نفترض أنها تساوي حاصل ضرب معامل المتغير X2 في معامل المتغير X2.

$$Z = (3)(2) = 6$$

$$3X_1 + 2X_2 = 6$$

 X_1 قيمة X_2 تساوي طلو افترضنا أن قيمة X_3 تساوي صفر فهذا يعني أن قيمة تساوي (2)، وبالعكس لو افترضنا أن قيمة X_1 تساوي (2). X_2 تساوي (3).

وعند تمثيل دالة الهدف بالرسم البياني تظهر لنا كما يلي:

| C | С | | 10 | 0 | 0 | |
|----|----------------|----|----------------|----------------|----------------|----|
| | | Χι | X ₂ | S_1 | S ₂ | b |
| 10 | X ₂ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{4}$ | 2 |
| 5 | Xı | 1 | 0 | $\frac{-1}{2}$ | 3. | 0 |
| | Z. | 5 | 10 | 5 2 | 5/4 | 20 |
| С | -Z | 0 | 0 | $\frac{-5}{2}$ | $\frac{-5}{4}$ | |

يلاحظ أن حالة الانحلال في الحل قد ظهرت في المرحلة الثانية واستمرت في المرحلة الثالثة رغم الحصول على الحل الأمثل ولذلك لم تتحسن قيمة دالة الهدف وبقيت عند (20) في كلا المرحلتين.

2- تعدد الحلول المثلى:

أ- بالرسم البياني:

يمكن التعرف على أن لمشكلة البرمجة الخطية أكثر من حل أمثل عندما تكون معادلة دالة الهدف موازية إلى معادلة أحد القيود المحايدة والقيد المحايد هو القيد المحدد لمنطقة الحلول المكنة.

مثال:

Max.
$$Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.T

 $X_1 \le 4$

 $X_2 \le 6$

 $3X_1 + 2X_2 \ge 18$

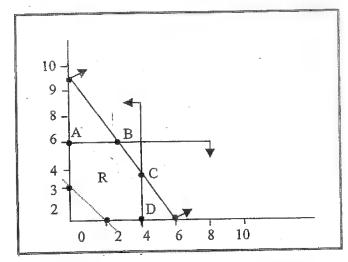
| | 2 | 6 | 2 | 0 | 0 | |
|----|----------------|-------|----------------|-----|----------------|-----|
| : | | X_1 | X ₂ | .Sı | S ₂ | ъ |
| 0 | Sı | 12 | 4 | 1 | 0 | 200 |
| 0 | S ₂ | 3 | 5 | 0 | 1 | 150 |
| 2 | Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C- | -Z | 6 | 2 | 0 | 0 | |

| | С | | 2 | 0 | 0 | |
|-----|----------------|-------|----------------------|----------------|----------------|------------------|
| | | X_1 | $\dot{\mathrm{X}_2}$ | S_1 | S ₂ | b |
| 6 . | Xı | 1 | 1/3 | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{200}{12}$ |
| 0 | S ₂ | 0 | 4 | $\frac{-1}{4}$ | 1 | 100 |
| 2 | 7 | 6 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 100 |
| C- | -Z | 0 | 0 | $\frac{-1}{2}$ | 0 | |

وحيث أن كافئة القيم في صف (C-Z) صفرية أو سالبة والهدف هو التعظيم فإن الحل الأمثل قد تحقق حيث:

$$Z = 100$$
, $X_2 = 0$, $X_1 = \frac{200}{12}$

نلاحظ في الجدول أعلاه أن المتغير غير الأساسي X₁ قد دخل الحل وبالتالي فإن معامل ارتباطه مع دالة الهدف مساوياً للصفر أما المتغير غير



إن الخط المتقطع هو خط دالة الهدف ولأنه موازي للقيد الثالث المحايد فهذا يعني أن لمشكلة البرمجة الخطية أعلاه أكثر من حل أمثل. وللتأكد من أن لهذه المشكلة أكثر من حل أمثل، نحدد نقاط الحل (A, B, C, D) ونجد قيم هذه النقاط كما تعلمناها في الوحدة الثانية ونعوضهم بدالة الهدف لنجد أكثر من قيمة مثالية متساوية، أي أن هنالك تعدد حلول مثلى.

ب- بطريقة السمبلكس:

يستدل على وجود حل أمثل آخر أو أكثر في حالة استخدام طريقة السمبلكس عندما نصل إلى الحل الأمثل ولا يزال أحد المتغيرات غير الأساسية $X_1, X_2, \dots X_n$ قيمة دالة الهدف.

مثال:

Max.
$$Z = 6X_1 + 2X_2$$

S.T
$$12X_1 + 4X_2 \le 200$$
$$3X_1 + 5X_2 \le 150$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

وعند تعويض قيم المعادلة المحورية وقيم X1 الجديدة في جدول حل جديد، تظهر لنا قيم Z وقيم C-Z كما يلي:

| | С | | 2 | 0 | 0 | |
|----|------------------|-------|-------|-----------------|-----------------|-----------|
| | | X_1 | X_2 | Sı | S_2 | Ъ |
| 6 | . X _l | 1 | 0 | <u>5</u> 48 | $\frac{-1}{12}$ | 100 12 |
| 2 | X ₂ | 0 | 1 | $\frac{-1}{16}$ | 1-4 | . 25 |
| 2 | 2 | 6 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 100 |
| Ç. | -Z | 0 | 0 | $\frac{-1}{2}$ | 0 | |

وحيث أن كافة القيم في صف (C-Z) صفرية أو سالبة فإن الحل الأمثل قد تحقق حيث:

$$Z = 100$$
, $X_2 = 25$, $X_1 = \frac{200}{12}$

نلاحظ بأن قيمة دالة الهدف في هذا الحل لم تتغير عما هي عليه في الحالة السابقة، ويذلك أصبح لدينا حلين أساسيين بديلين هما:

| $X_1 = \frac{200}{12}$ | $X_2 = 0$ | Z = 100 | الحل الأول |
|------------------------|------------|---------|-------------|
| $X_1 = \frac{100}{12}$ | $X_2 = 25$ | Z = 100 | الحل الثاني |

الأساسي الثاني X2 فلم يدخل الحل ومع ذلك نجد أن معامل ارتباطه مع دالة الهدف يساوي صفراً أيضا وهذا مخالف لقواعد السمبلكس التي تنص على أنه إذا لم يدخل الحل أحد المتغيرات غير الأساسية فإن معاملة مع دالـة الهدف يجب أن لا تكون مساوية للصفر، وهذا يعطي الدليل على وجود حل أمثل بديل

كيف نحدد الحل الأمثل البديل؟

إن الحل الأمثل البديل يمكن تحديده من خلال الرجوع إلى جدول الحل الأمثل السابقِ واعتبار المتغير غير الأساسي X2 الذي معامل ارتباطه مع دالة الهدف مساويا للصفر متغير داخل كما يلي: .

| C | , | 6 | 2 | 0 | 0 | | |
|-----|------------------|-------|----------------|----------------|----------------|-----------|-------|
| | | X_1 | X ₂ | Sı | S ₂ | Ъ | Ratio |
| 6 | X_1 | 1 | | $\frac{1}{12}$ | 0 | 200 12 | 50 |
| - 0 | S ₂ . | 0 | 4 | | 1 | 100 | 25 |
| 2 | Z. | 6 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 100 | |
| C- | Z | 0 | 0 | <u>-1</u> 2 | 0 | | |

– المعادلة المحورية هي [25،
$$\frac{1}{4}$$
، 1، 0]

$$[1.0, \frac{5}{48}, \frac{-1}{12}, \frac{100}{12}] = قيم X_1$$
 الجديدة

3- عدم وجود حلول ممكنة (تعذر الحل):

أ- بالرسم البياني:

تظهر مشكلة عدم وجود حلول ممكنة بالرسم البياني من خلال عدم تشكل منطقة حلول ممكنة على الإطلاق. وتحدث هذه الحالة عندما تضم المشكلة فيوداً متعارضة تجعل منطقة الحل للقيود في هدنه الحالبة متعاكسة لا تتقاطع في منطقة حل واحدة على الأقل.

مثال:

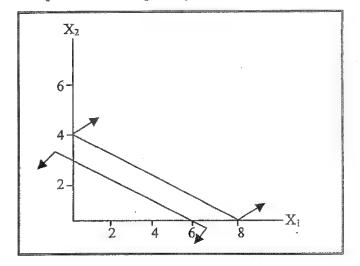
Max.
$$Z = X_1 + 4X_2$$

$$X_1 + 2X_2 \le 6$$

$$\frac{3}{2}X_1 + 3X_2 \ge 12$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

فعند تحديد منطقة الحل بالرسم البياني تظهر لنا كما يلى



ونلاحظ هنا أن منطقتنا الحل للقيدين الأول والثاني متعاكستان ولا يتقاطعان نهائيا وبالتالي تعذر الحل.

ب- طريقة السمبلكس:

نُقُول أن لا حلول ممكنة لمسألة برمجة خطية بطريقة السمبلكس إذا تحقق شرط الأمثلية في ظل وجود متغير اصطناعي (R) في عمود الحل (عمود المتغيرات الأساسية) بقيمة موجبة (أكبر من صفر)، فالقيمة الموجبة لهذا المتغير الأصطناعي تعني أن أحد قيود المشكلة غير منطقي ومتناقض مع القيد الآخر، فقاعدة السمبلكس للأمثلية تشترط خروج كافة قيم المتغيرات الاصطناعية من عمود الحل عند الوصول للحل الأمثل، علماً بأن سبب وجود المتغير الاصطناعي هو وجود قيد من نوع أكبر أو يساوي:

مثال:

Max.
$$Z = 2X_1 + X_2$$

$$3X_1 + 2X_2 \le 6$$

$$2X_1 + 3X_2 \ge 12$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

منطقة ليس مفلقة. وتحدث هذه الحالة بسبب ضعف في صياغة المشكلة، فمثلا ليس من المعقول إمكانية تحقيق أرباح غير محددة من موارد محدودة. ونلاحظ هذه الحالة عندما تكون معاملات أحد المتغيرات في جميع قيود المشكلة سالية أو تساوي صَّنفر.

مثال:

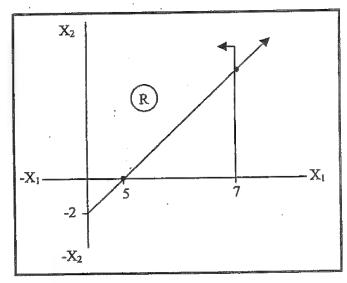
Max.
$$Z = X1 + 2X2$$

S.T

$$X_1-2X_2\leq 5$$

$$X_1 \leq 7$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$



نلاحظ بعد تمثيل قيود المشكلة بالرسم البياني أن منطقة الحل مفتوحة من أعلى وبالتالي ليس لها حدود.

| | С | 2 | 1 | 0 | 0 | -M | | |
|-----|----------------|------------------------------|-------|--------------------------------|----------------|----|------|--|
| | | X_1 | X_2 | Sı | S ₂ | R | Ъ | Ratio |
| 0 | Sı | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 6 | 3 |
| -M | . R | .2 | 1 3 | 0. | -1 | 1 | 12 | 4 |
| | z | -2M | -3M | 0 | M | -M | -12M | |
| C | C-Z | 2+2M | 1+3M | 0 | -M | 0 | | |
| 1 | X ₂ | $\frac{3}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 3 | |
| -M | R | $\frac{-5}{2}$ | 0 | $\frac{-3}{2}$ | -1 | 1 | 3 | |
| | Z | $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}M$ | 1 | $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}M$ | M | -M | 3-3M | |
| . (| J-Z* | $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}M$ | 0 | $\frac{-1}{2} - \frac{3}{2} M$ | -M | 0 | | No. of the last of |

نلاحظ في الجدول أن الحل الأمثل قد تحقق حيث كافة القيم في صف C-Z صفرية أو سالبة، إلا أن هذا الحل يتضمن متغير اصطناعي (R) في عمود الحل بقيمة موجبة هي (3) وهذا يعني أن مسألة البرمجة الخطية حالة خاصة من نوع عدم إمكانية الحل.

4- عدم توفر حدود:

أ-بالرسم البياتي:

يمكن ملاحظة عدم توفر حدود لمشكلة برمجة خطية باستخدام الرسم البياني عندما تكون منطقة الحل مفتوحة من أحد الاتجاهات وبالتالي فهي

| | | X ₁ | X ₂ | S_1 | S ₂ | /b | Ratio | |
|----|----------------|----------------|----------------|-------|----------------|----|-------|--|
| 3 | X_1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 4 | تهمل | |
| 2 | X ₂ | 0 | 1 | -3ુ | 1 | 3 | تهمل | |
| Z | | 3 | 2 | -12 | 5 | 18 | | |
| C- | Z | 0 | 0 | 12 | -5 | | | |

نلاحظ بعد هذا المستوى من تحسين العل بأن العل الأمثل لم يتحقق بعد لوجود قيمة موجبة في صف (C-Z)، الأمر الذي يتطلب تحسين العل ثانية. فالمتغير (S₁) هو المتغير الداخل لأن قيمته موجبة أما المتغير الخارج فلا يمكن تحديده لأن كافة قيم العمود المحوري سائبة تجعل حاصل قسمة قيم المتغيرات الأساسية (b) عليها سالبة يجب إهمالها. وهذا يعني أن مشكلة البرمجة موضوع البحث فيها عدم محدودية حل يمكن فيها تعظيم الهدف بشكل غير محدود مع محدودية القيود.

ب- طريقة السمبلكس:

يستدل على وجود عدم توفر حدود بطريقة السمبلكس عندما يمكن تحديد المتغير الداخل ولا يمكن تحديد المتغير الخارج لتحديد العنصر المحوري وبالتائي الصف المحوري. وسبب عدم القدرة على تحديد المتغير الخارج هو أن كافة قيم العمود المحوري صفرية أو سالبة الأمر الذي يترتب عليه أن تصبح كافة قيم المتغيرات الخارجة سائبة والتي تشترط طريقة السمبلكس إهمالهم.

مثال

Max.
$$Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.T

 $X_1 - X_2 \le 1$

 $3X_1 - 2X_2 \le 6$

 $X_1, X_2 \ge 0$

| С | | 3 | 2 | 0 | 0 | ъ | Ratio |
|----|----------------|----------------|-------|-------|-------|---|-------|
| | | \mathbf{X}_1 | X_2 | S_1 | S_2 | | |
| 0 | S_1 | 1 | | 1 | . 0 | | 1 |
| 0 | S ₂ | 3 | -2 | 0 | 1 | 6 | 2 |
| Z | 7. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| C- | ·Z | 3. | 2 | 0 | 0 | | |

| 3 | X_{l} | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 |
|----|---------|---|----|----|---|--------------|
| 0 | S_2 | 0 | | -3 | 1 | . 3 . |
| 2 | | 3 | -3 | 3 | 0 | 3 |
| C- | Z | 0 | 5 | -3 | 0 | |

$$4X_1 + 3X_2 \le 12$$

$$4X_1 + X_2 \le 8$$

$$4X_1 - X_2 \le 8$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال الثالث:

بين بالرسم البياني أن نماذج البرمجة الخطية التالية تحتوي على حل متكرر:

-1

Max.
$$Z = 2X_1 + 4X_2$$

S.T

$$X_1 + 2X_2 \le 5$$

$$X_1 + X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Max. $Z = 8X_1 + 4X_2$

S.T

$$4X_1 + 2X_2 \le 8$$

$$2X_1 + 2X_2 \le 6$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

أسئلة الوحدة الثالثة

السؤال الأول:

بين بالرسم البياني أن نماذج البرمجة الخطية التالية تحتوي على انحلال (تكرار) حل.

Max. $Z = 6X_1 + 4X_2$

S.T

$$3X_1+2X_2\leq 12$$

$$X_1 + 2X_2 \le 8$$

$$X_2 \le 8$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Max.
$$Z = 3X_1 + 7X_2$$

S.T

$$2X_1 + 8X_2 \le 16$$

$$2X_1 + 4X_2 \le 8$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال الثاني:

بين مستخدماً طريقة السمبلكس أن نموذج البرمجة الخطية التالي يحتوي على انحلال (تكرار) حل.

Max.
$$Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.T

$$X_1 - X_2 \le 1$$

$$3X_1 - 2X_2 \le 6$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Max. $Z = 4X_1 + 2X_2$

S.T

$$3X_1 - 2X_2 \le 60$$

$$2X_1 - 2X_2 \le 20$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال السابع:

بين مستخدما طريقة السمبلكس أن ليس لنموذج البرمجة الخطية التالي حلاً محدداً.

Max.
$$Z = 5X_1 + 8X_2$$

S.T

$$X_1 \ge 8$$

$$X_2 \le 15$$

$$X_1 + X_2 \ge 15$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال الرابع:

بين مستخدماً طريقة السمبلكس أن نموذج البرمجة الخطية التالي يحتوي على حل متكرر

Max.
$$Z = 6X_1 + 2X_2$$

S.T

$$12X_1 + 4X_2 \le 200$$

$$3X_1 + 5X_2 \le 150$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال الخامس:

بين بالرسم البياني أن نماذج البرمجة الخطية التالية ليس لها حل ممكن بالرسم البيان:

١

Max.
$$Z = 2X_1 + X_2$$

S.T

$$3X_1 + 2X_2 \le 6$$

$$2X_1 + 3X_2 \ge 12$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Max. $Z = 3X_1 + 4X_2$

$$2X_1 + 4X_2 \le 6$$

$$X_1 - 2X_2 \ge 8$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الوحدة الرابعة

النموذج المقابل / النظرية الثنائية

The dual In Linear Programming

تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل:

ذكرنا سابقاً بأن البرمجة الخطية تبحث في توزيع الموارد المحددة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار القيود المفروضة لتحقيق أهداف المنشأة كتعظيم الأرباح أو خفض التكاليف، وإن استخدام البرمجة الخطية يستلزم توفر شروط معينة مثل القدرة على تحديد المشكلة موضوع البرمجة تحديداً رياضياً دفيقاً على شكل دالة خطية تسمى دالة الهدف والقدرة على تحديد القيود أو مجموعة المحددات التي تحد من درجة تحقيق الأهداف تحديداً رياضياً أيضاً على شكل متباينات.

إن تحديد المشكلة موضوع البرمجة وكذلك القيود المفروضة عليها تحديداً رياضياً على شكل متباينات هو الصيغة الأولى لمشكلة البرمجة الخطية ويطلق عليه اسم النموذج الأولي (Primal Model)، ويقترن بهذا النموذج الأولي نموذج آخر يطلق عليه النموذج المقابل (Dual Model) ولكل نموذج مقابل هنالك حل أمثل مماثل للحل في النموذج الأولي، أي أن النموذج المقابل هو الوجه الآخر للمشكلة الأصلية.

إن اللجوء إلى استخدام النموذج المقابل يتضمن فوائد متعددة منها تقليل الجداول والعمليات الحسابية خاصة في حالة:

1- أن عدد قيود النموذج الأولى أكثر من عدد المتغيرات المتضمنة فيه.

2-إذا كانت إشارات القيود من نوع (≤) أكبر أو يساوي والتي تتطلب إضافة متغيرات اصطناعية.

مثال:

 $Min Z = 0.07X_1 + 0.05X_2$

2- نغير مواقع الأعمدة والصفوف بحيث نجعل معاملات دائمة الهدف في النموذج الأولي قيم متجهة الثوابت في النموذج المقابل ومعاملات متجهة الثوابت في النموذج الأولي معاملات دالة الهدف في النموذج المقابل كما يلي:

| | 0.1 | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.07 |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|------|
| | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.05 |
| $W \Rightarrow$ | 0.4 | 0.6 | 2.0 | 1.8 | 0 |

3- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم تصبح في النموذج المقابل تصغير والعكس صحيح.

 (\ge) أصغر أو يساوي تصبح في النموذج المقابل (\le) أكبر أو يساوي والعكس صحيح.

5- التحقق من أن عدد القيود في النموذج الأولي يساوي عدد المتغيرات في دالة الهدف في النموذج المقابل وأن عدد متغيرات دالة الهدف في النموذج الأولي يساوي عدد القيود في النموذج المقابل:

وبالتائي فإن النموذج المقابل للمشكلة السابقة هو:

$$Max. w = 0.4y_1 + 0.6y_2 + 2.0y_3 + 1.8y_4$$

S.T

$$0.1y_1 + 0\ y_2 + 0.1y_3 + 0.2y_4 \leq 0.07$$

لنموذج المقامل/النظربة الثنائية

$$0.1X_1 + 0X_2 \ge 0.4$$

 $0X_1 + 0.1X_2 \ge 0.6$

$$0.1X_1 + 0.2X_2 \ge 2$$

$$0.2X_1 \div 0.1X_2 \ge 1.8$$

$$X1, X2 \ge 0$$

إن النموذج المقابل لهذه المشكلة هو:

Max.
$$w = 0.4y_1 + 0.6y_2 + 2y_3 + 1.8y_4$$

S.T

$$0.1y_1 + 0y_2 + 0.1y_3 + 0.2y_4 \le 0.07$$

$$0y_1 + 0.1y_2 + 0.2y_3 + 0.1y_4 \le 0.05$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$$

نلاحظ في النموذج الأولي أن عدد القيود أربعة في حين أن عدد المتغيرات في دالة الهدف إثنان الأمر الذي سيؤدي إلى إطالة خطوات الحل. كما ونلاحظ أن اتجاه المتباينات من نوع (≤) أكبر أو يساوي وهذا يتطلب متفيرات اصطناعية. وعند تحويل النموذج الأولي إلى المقابل أصبحت عدد القيود اثنان بدلا من أربعة وهذا سيقلل من خطوات الحل، واتجاه المتباينات أصبحت من نوع (≥) أقل أو يساوي وهذا لا يتطلب إضافة متغيرات اصطناعية.

إن السؤال الذي سيطرح نفسه الآن هو كيف تم تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل في هذا المثال؟؟؟

للإجابة على هذا السؤال علينا السير بالخطوات التالية والتحقق من بعض الشروط كما يلى:

1- نضع معاملات المتغيرات للقيود ودالة الهدف في مصفوفة كما يلي:

$$3X_1 + 2X_2 = 10$$
(1)

$$2X_1 + X_2 \ge 9$$
(2)

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل:

$$3X_1 + 2X_2 \ge 10$$
(1)

$$-1 [3X_1 + 2X_2 \le 10]$$

$$-3X_1 - 2X_2 \ge -10$$
(2)

$$\Rightarrow$$
 Min. Z=5X₁ + 8X₂

S.T

$$3X_1 + 2X_2 \ge 10 \dots (1)$$

$$-3X_1 - 2X_2 \ge -10$$
(2)

$$2X_1 + X_2 \ge 9$$
(3)

 $X_1, X_2 \ge 0$

نلاحظ بأن قيود المشكلة قد أصبحوا ثلاثة قيود بدلاً من قيدين، وعليه فإن النموذج المقابل لهذه المشكلة هو:

$$Max. y = 10y_1 - 10y_2 + 9y_3$$

S.T

$$3y_1 - 3y_2 + 2y_3 \le 5$$

$$2y_1 - 2y_2 + y_3 \le 8$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

 $0y_1 + 0.1y_2 + 0.2y_3 + 0.1y_4 \le 0.05$

 $y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$

الذي حقق الشروط من (3-5) السابقة.

ملاحظة:

تفترض عملية التحويل من نموذج أولي إلى نموذج مقابل أنه:

- 1- إذا كان الهدف في المشكلة هو التعظيم، فيجب أن يرتبط التعظيم مع متباينات جميعها بنفس الاتجاه وفي صيغة (≥) أصغر أو يساوى.
- 2- إذا كان الهدف في المشكلة هو التقليل، فيجب أن يرتبط التقليل مع متباينات جميعها بنفس الاتجاه أيضاً وفي صيغة (≤) أكبر أو يساوي.

وبعكس هذا الأمر يجب إعادة الترتيب بما يتوافق مع هذه الشروط وفق الاحتمالات التالية:

أ- الهدف تعظيم إلا أن أحد القيود (≤) أكبر أو يساوى.

في مثل هذه الحالة نضرب طرفي القيود بـ (-1) ونقلب الإشارة إلى (\ge) أصغر أو يساوى.

ب- الهدف تصغير إلا أن أحد القيود (≥) أصغر أو يساوي.

وهنا أيضا نضرب طرفي القيد بـ (-1) ونقلب الإشارة إلى (≤) أكبر أو يساوى.

جـ- عندما يكون أحد القيود عبارة عن مساواة.

في مثل هذه الحالة يتم تحويل القيد الذي يحمل علامة المساواة إلى متباينتين مختلفتين بالاتجاه، ثم نضرب القيد المعاكس لدالة الهدف بـ (-1).

مثال:

Min. $Z = 5X_1 + 8X_2$

 $y_1, y_2 \ge 0$

2- للوصول إلى الحل الأمثل نطبق الخطوات التالية:

أ- تحويل متباينات القيود إلى معادلات كما يلى:

$$X_1 + 2X_2 = 4$$

$$3X_1 + X_2 = 6$$

ب- تحديد نقاط تقاطع متغيرات القيود مع المحاور كما يلى:

$$X_1 + 2X_2 = 4$$
(1)

If
$$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 2$$

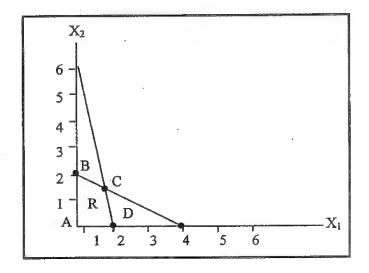
$$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 4$$

$$3X_1 + X_2 = 6$$
(2)

If
$$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 6$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 2$$

ج- رسم القيود على الشكل البياني كما يلي:



الحل البياني للنموذج المقابل:

إن الحل البياني للنموذج المقابل لا يختلف في الأسلوب عن الحل البياني للنموذج الأولي، مع ملاحظة أن الحلين لمشكلة ما يتطابقان والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال: إذا كانت لديك النموذج الأولي التالي:

Max.
$$Z=2X_1+3X_2$$
.

S.T

$$X_1 + 2X_2 \le 4$$

$$3X_1 + X_2 \le 6$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

المطلوب:

1- اكتب النموذج المقابل.

2- أوجد الحل الأمثل للنموذج الأولي باستخدام الطريقة البيانية.

3- أوجد الحل الأمثل للنموذج المقابل باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

$$Min. w = 4y_1 + 6y_2$$

$$y_1 + 3 y_2 \ge 2$$

$$2y_1 + y_2 \ge 3$$

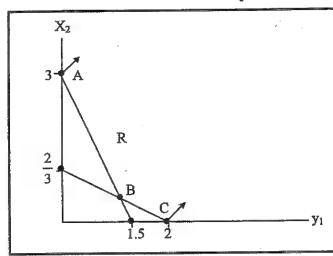
أي أن قيم إحداثيات النقطة (C) هي $\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$ ، ويتعويض هذه القيم في دالة الهدف نحصل على:

$$Z = 2\left(\frac{8}{5}\right) + 3\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{16}{5} + \frac{18}{5} = 6.8$$

ويمقارنة قيم البدائل الأربعة، نجد أن البديل الأفضل هو عند النقطة (C) حيث تعطي أكبر قيمة لـZ. أي أن الحل الأمثل للنموذج الأولي هو:

$$X_1 = \frac{8}{5}$$
, $X_2 = \frac{6}{5}$, $Z = 6.8$

3- الوصول إلى الحل الأمثل للنموذج المقابل، نتبع نفس الخطوات السابقة والمتي ستؤدي إلى الشكل التالي:



| النقاط | Уı | y 2 | $w = 4y_1 + 6y_2$ |
|--------|----|------------|-------------------|
| Α | 0 | 3 | w = 18 |
| В | ? | ? | w=? |
| С | 2 | 0 | w = 8 |

د- تحديد الحل الأمثل والذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع ABCD.

| النقاط | ت النقاط | قيم إحداثيا | قيمة دالة الهدف |
|--------|-------------------------------|-------------|-------------------|
| | X ₁ X ₂ | | $Z = 2X_1 + 3X_2$ |
| A | . 0 | 0 | Z = 0 |
| В | 0 | 2 | Z= 6 |
| С | ? | ? | Z = ? |
| D | 2 | 0 | . Z = 4 |

ولإيجاد قيم إحداثيات النقطة (C)، يتم حل معادلات المستقيمين المتقاطعين كما يلي:

$$X_1+2X_2=4$$
(1)

$$-2 [3X_1 + X_2 = 6]$$
(2)

$$X_1 + {}_2X_2 = 4.....(3)$$

$$-6X_1 - 2X_2 = -12....(4)$$

$$-5X_1 = -8$$

$$X_1 = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{8}{5} + 2X_2 = 4$$

$$2X_2 = 4 - \frac{8}{5}$$

$$2X_2 = \frac{12}{5} \Rightarrow X_2 = \frac{6}{5}$$

حالة أن عدد قيود النموذج الأولي أكثر من عدد المتغيرات المتضمنة فيه أو إذا كانت إشارات القيود من نوع (\leq) أكبر أو يساوي والتي تتطلب إضافة متغيرات اصطناعية. حيث يمكن استنتاج حل النموذج الأولي من حل النموذج المقابل وبالعكس. فقيم المتغيرات $(y_1, y_2, ... y_n)$ في جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل هي معاملات المتغيرات الأساسية $(S_1, S_2, ... S_n)$ في صف C-Z في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي، وقيم المتغيرات $(X_1, X_2, ... X_n)$ في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي، وقيم المتغيرات الأساسية $(S_1, S_2, ... S_n)$ في صف $(S_1, S_2, ... S_n)$

مثال:

إذا كان جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل للمشكلة الأولية التالية:

Min.
$$Z = X_1 + X_2$$

S.T

 $0.12X_1 + 0.04X_2 \ge 600$

 $0.10X_1 + 0.40X_2 \ge 1000$

 $X_1, X_2 \ge 0$

هو كما يلي:

| $y_1 + 3y_2 = 2 \dots (1)$ |
|------------------------------|
| $-3[2y_1 + y_2 = 3]$ (2) |
| $y_1 + 3y_2 = 2$ (3) |
| $-6y_1 -3y_2 = -9 \dots (4)$ |
| $-5y_1 = -7$ |
| $y_1 = \frac{7}{5}$ |
| $\frac{7}{5} + 3y_2 = 2$ |
| $3y_2 = 2 - \frac{7}{5}$ |
| $y_2 = \frac{1}{5}$ |

وبتعويض قيم ٧٤, ٧١ في دالة الهدف نحصل على:

$$\mathbf{w} = 4\left(\frac{7}{5}\right) + 6\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{28}{5} + \frac{6}{5} = 6.8$$

وبالتالي فإن الحل الأمثل هو:

$$y_1 = \frac{7}{5}$$
, $y_2 = \frac{1}{5}$, $w = 6.8$

$$\Rightarrow$$
 Z= w= 6.8

الطريقة المبسطة لحل النموذج المقابل:

تكمن أهمية إيجاد الحل الأمثل للنموذج المقابل بدلاً من إيجاد الحل الأمثل للنموذج الأولى هو لتسهيل العمليات الحسابية وتقليل عدد الجداول خاصة في

$$0X_1 + 0.1X_2 \ge 0.6$$

$$0.1X_1 + 0.2X_2 \ge 2.0$$

$$0.2X_1 + 0.1X_2 \ge 1.8$$

هو كما يلي:

| C | 3 | 0.07 | 0.05 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
|------|----------------|----------------|----------------|----|----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| | • | X ₁ | X ₂ | Si | S ₂ | S ₃ | S ₄ | |
| 0.07 | X_1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 10 3 | <u>-20</u> 3 | $\frac{16}{3}$ |
| 0.05 | X ₂ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{-20}{3}$ | 10 3 | <u>22</u> 3 |
| 7 | 7 | 0.07 | 0.05 | 0 | 0 | -0.1 | -0.3 | 0.74 |
| C- | Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.1 | 0.3 | |

المطلوب:

1- كتابة النموذج المقابل للمشكلة الأولية.

2- استنتاج فيم متغيرات النموذج المقابل من جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي.

الحل:

-1

Max.
$$W = 0.4y_1 + 0.6y_2 + 2y_3 + 1.8y_4$$

$$0.1y_1 + 0y_2 + 0.1y_3 + 0.2y_4 \le 0.07$$

$$0y_1 + 0.1y_2 + 0.2y_3 + 0.1y_4 \le 0.05$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$$

| C | Ċ | | 1000 | 0 | 0 | |
|------|------------|-----|------------|---------------------|---------------------|-----------------|
| | | Уı | y 2 | S_1 | \mathbb{S}_2 | |
| 600 | Уι | 1 | .0 | 100- | $\frac{-25}{11}$ | $\frac{75}{11}$ |
| 1000 | y 2 | 0 | 1 | $\frac{-10}{11}$ | 30 11 | $\frac{20}{11}$ |
| w | | 600 | 1000 | 50000 11 | 15000 11 | 65000 11 |
| C- | W | 0 | 0 | <u>-50000</u> 11 | $\frac{-15000}{11}$ | |

المطلوب:

استنباط قيم متغيرات النموذج الأولي من جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل.

الحل:

إن قيم الحل الامثل للنموذج الأولي هي معاملات المتغيرات الأساسية في صف C-W في جدول الحل المقابل أي أن:

$$X_1 = S_1 = \frac{50000}{11}$$

$$X_2 = S_2 = \frac{15000}{11}$$

$$Z = W = \frac{65000}{11}$$

مثال2: إذا كان جدول الحل الأمثل للمشكلة الأولية التالية:

Min.
$$Z = 0.07X_1 + 0.05X_2$$

أسئلة الوحدة الرابعة

السؤالُّ الأول:

اكتب النموذج المقابل لنماذج البرمجة الخطية الأولية التالية:

-1

Max.
$$Z = 3X_1 + 5X_2$$

S.T

$$2X_1 + 6X_2 \le 50$$

$$3X_1 + 2X_2 \le 35$$

$$5X_1 - 3X_2 \le 10$$

$$X_2 \le 20$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

-2

Min.
$$Z = 3X_1 - 2X_2 + 4X_3$$

S.T

$$3X_1 + 5X_2 + 4X_3 \ge 7$$

$$6X_1 + X_2 + 3X_3 \ge 4$$

$$7X_1 - 2X_2 - X_3 \le 10$$

$$X_1 - 2X_2 + 5X_3 \ge 3$$

$$4X_1 + 7X_2 - 2X_3 \ge 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

-3

Max.
$$Z = 3X_1 + 10X_2 + 2X_3$$

S.T

$$2X_1 + 3X_2 + 2X_3 \le 7$$

$$3X_1 - 2X_2 + 4X_3 = 3$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

$$y_1 = S_1 = 0$$

 $y_2 = S_2 = 0$
 $y_3 = S_3 = 0.1$
 $y_4 = S4 = 0.3$

= 0.74

Max.
$$w = 0.4 (0) + 0.6 (0) + 2 (0.1) + 1.8 (0.3)$$

= $0 + 0 + 0.2 + 0.54$

السؤال الرابع:

مستخدماً طريقة السمبلكس، أوجد الحل الأمثل للنموذج المقابل من الحل الأمثل للنموذج الأولي التالي:

Max.
$$Z = 2X_1 + 5X_2$$

S.T

$$3X_1 + 5X_2 \le 8$$

$$2X_1 + 7X_2 \le 12$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Max. $Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \le 18$$

 $5X_1 + 6X_3 \le 20$
 $-X_1 + X_2 + 4X_3 + X_4 \ge 9$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$$

السؤال الثاني:

إذا كان لديك النموذج الأولى التالي:

Max.
$$Z = 2X_1 + 3X_2$$

S.T

$$X_1 + 2X_2 \le 20$$

$$X_1 + X_2 \le 12$$

$$X_i, X \ge 0$$

المطلوب:

- 1- أوجد الحل الأمثل للنموذج الأولي مستخدماً طريقة الرسم البياني.
 - 2- أوجد النموذج المقابل لهذه المشكلة.
 - 3- أوجد الحل الأمثل للنموذج المقابل بالرسم البياني.

السؤال الثالث:

مستخدماً طريقة السمبلكس أوجد العل الأمثل للنموذج الأولي التالي من العل الأمثل للنموذج المقابل:

Min.
$$Z = 4X_1 + 6X_2$$

$$X_1 + 2X_2 \ge 80$$

$$3X_1 + X_2 \ge 75$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الوحدة الخامسة مشكلة النقل

مشكلة النقل:

تعتبر طريقة النقل أو كما تسمى غالباً بمشكلة النقل من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع أو المواد من مصادر متعددة (مراكز الإنتاج أو المخزون) إلى مراكز متعددة (المراكز التسويقية أو البيعية) بهدف سد احتياجات المراكز ذات العلاقة بأقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل. فمشكلة النقل تأخذ أهميتها من خلال ما تحتله تكاليف النقل من أهمية نسبية مقارنة بمجموع تكاليف الصنع والتوزيع وغيرها.

تعتبر مشكلة النقل من المشاكل الخاصة في البرمجة الخطية، حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من استخدامها هو إيجاد أسلوب أمثل لتوزيع (نقل أو شحن) سلعة أو مادة ما من مناطق إنتاجها (عرضها) إلى مناطق استهلاكها (طلبها) بحيث تكون كلفة النقل الكلية للسلعة أقل ما يمكن. ومشاكل النقل يمكن حلها باستخدام طريقة السمبلكس في البرمجة الخطية إلا أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريخ كافة مفردات (متغيرات) مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل وهذه المفردات هي:

- 1- عدد مراكز التوزيع أو المراكز الإنتاجية أو المخازن.
- 2- كميات ما هو متوفر من وحدات السلعة المراد نقلها في كل مركز توزيع (عرض).
 - 3- عدد مراكز الاستلام أو المراكز التسويقية أو البيعية.
 - 4- الكميات المطلوبة من وحدات السلعة من كل مركز استلام (طلب).
 - 5- تكلفة نقل الوحدات السلعية من كل مركز توزيع إلى كل مراكز الاستلام.

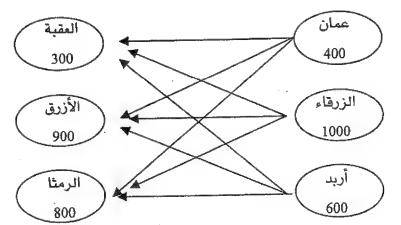
| الطاقة الاستيعابية | الموقع | المخازن | كميات السلعة | الموقع | المصنع |
|--------------------|--------|---------|--------------|---------|--------|
| 300 | العقبة | х | 400 | عمان | A |
| 900 | الأررق | Y | 1000 | الزرقاء | В |
| 800 | الرمثا | Z | 600 | اربد | С |

علما بأن تكلفة نقل منتجات كل مصنع إلى المخازن الثلاثة هي كما في الجدول التالي:

| الرمثا | الأزرق | العقبة | المخازن |
|--------|--------|--------|---------|
| | | | المصانع |
| 42 | 21 | - 31 | عمان |
| 30 | 21 | 20 | الزرقاء |
| 15 | 20 | 23 | اربد |

المطلوب: حدد مسارات النقل التي يمكن لإدارة المنشأة استخدامها في عملية النقل.

الحل:



6- حجم عرض السلع في المصادر الإنتاجية مجتمعة وحجم الطلب على السلع من قبل جميع المراكز التسويقية مجتمعة. فإذا كان حجم المرض يساوي حجم الطلب فإن مشكلة النقل هي مشكلة متوازنة وغير ذلك فإنها مشكلة غير متوازنة يجب أن توازن.

وتعتبر الصيغة الجدولية لمشكلة النقل منطلق المرحلة الأولى وهي مرحلة تحديد الحل الأساسي الأولي المكن يمكن الوصول إليه من خلال عدة طرق هي:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي.

2- طريقة الكلفة الأقل.

3- طريقة فوجل التقريبية (الجزاء).

ثم بعد ذلك تأتي المرحلة الثانية وهي مرحلة الحل الأمثل عن طريق إجراء تحسين على الحل الأولي من خلال طريقتين تستخدمان لهذا الهدف هما:

أ- طريقة المسار المتعرج (التخطي).

ب- طريقة عوامل الضرب (التوزيع المعدل).

علماً بأن شرط الانتقال إلى هذه المرحلة يتطلب ان تكون مشكلة النقل في الحل الأساسي مستوفية للشرط التالي:

[عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) = عدد الصفوف + عدد الأعمدة - 1].

مثال:

منشأة زيد الصناعية لها ثلاثة مصانع في مدن (عمان، الزرقاء، اربد) ولها ثلاثة مخازن في مدن (العقبة، الأزرق، الرمثا). إن كميات السلعة المراد نقلها من المصانع الثلاثة وكذلك القدرة الاستيعابية للمخازن الثلاثة هي كما في الجدول التالي:

| المراكز | العقبة | الأزرق | الرمثا | عرض الصدر |
|-------------|--------|--------|--------|-----------|
| المصادر | | | | |
| عمان | 31 | 21 | 42 | 400 |
| الزرقاء | 20 | 21 | 30 | 1000 |
| اربد | 23 | 20 | 15 | 600 |
| طلب المراكز | 300 | 900 | 800 | 2000 |

وهو كما ذكرنا سابقاً يمثل المنطلق نحو الحل الأساسي الأولي المكن.

إيجاد الحل الأساسَي الأولي المكن:

بعد أن يتم إعداد الصيغة الجدولية لمشكلة النقل فإن الخطوة اللاحقة هي إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن، وهناك ثلاثة طرق كما ذكرنا سابقاً تستخدم لهذا الفرض هي:

- 1- طريقة الركن الشمالي الغربي.
 - 2- طريقة أقل التكاليف.
- 3- طريقة فوجل التقريبية (الجزاء).

وبعد التوصل إلى الحل الأساسي الأولي يجب تدفيق هذا الحل لمعرفة فيما إذا كان هذا الحل أمثلاً أم لا، ويتم الاختيار بإحدى الطريقتين:

- أ- المسار المتعرج (التخطي).
- ب- عوامل الضرب (التوزيع المدل).

فإذا وجدنا أن الحل أمثلاً فإن المشكلة تكون قد انتهت، وأما إذا لم تكن فنقوم بتحسين الحل.

يوضح هذا الشكل مسارات النقل التي يمكن للإدارة استخدامها في عملية النقل. إلا أنّ السؤال الأكبر الذي يواجه الإدارة هو تحديد عدد الوحدات السلمية الواجب نقلها من كل مصنع إلى كل مخزن بما يحقق لها أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل للسلع. إن الإجابة على هذا السؤال يتطلب في البداية تفريغ كافة متغيرات مشكلة النقل في جدول النقل كخطوة أولى نحو تحديد الحل الأساسي الأولى المكن.

الصيغة الجدولية لمشكلة النقل:

تمثل الصيغة الجدولية لمشكلة النقل منطلق إيجاد حل أولي ممكن للوصول إلى الحل الأمثل (النهائي) المتمثل في تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل. والصيغة الجدولية لمشكلة النقل عبارة عن مصفوفة عدد صفوفها (M) تمثل المصادر (مراكز التوزيع) وعدد أعمدتها (n) وتمثل مراكز الاستلام وهو يظهر كما يلي:

| المراكز | $\mathbf{n_l}$ | n_2 | n_{m} | عرض المصدر |
|----------------|----------------|-------|---------|------------|
| المادر | | | | |
| M_i | | | | |
| M ₂ | | | | |
| • | | | | |
| M_n | | | | |
| طلب المراكز | | | | المجموع |

فعند عرض مفردات مشكلة النقل السابقة في صيغة جدولية تظهر لنا كما يلي:

ا- طريقة الركن الشمالي الفريي (الزاوية الشمالية الفربية): `

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة التوازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) وأن تبدأ عملية النقل من الزاوية الشمالية الغربية لجدول التكاليف كما يلي:

| المراكز | العقبة | الأزرق | الرمثا | عرض المصدر | |
|-------------|--------|--------|--------|---------------|------|
| المصادر | | | | المصدر | |
| عمان | 31 | 21 | 42 | 400 | .100 |
| | 300 | 100 | | | |
| الزرقاء | 20 | 21 | 30 | 1900 | 200 |
| | | 800 | 200 | | |
| اربد | 23 | 20 | 15 | 6,00 | |
| | | | 600 | | |
| طلب المراكز | 300 | 900 | 800 | 2000 | |

- 1- ننقل (300) وحدة من عمان إلى مخزن العقبة وبالتالي تلبية كافة احتياجات مخزن العقبة ويبقى في مصنع عمان (100) وحدة.
- 2- ننقل (100) وحدة من عمان إلى مخزن الأزرق، ولم يبقى في مصنع عمان أية وحدة وهناك (800) وحدة يمكن لمخزن الأزرق استيعابهم.
- 3- ننقل (800) وحدة من مصنع الزرقاء إلى مخازن الأزرق وبالتالي تلبية كافة احتياجات الأزرق وبقي في مصنع الزرقاء (200) وحدة.
- 4- ننقل (200) وحدة من مصنع الزرقاء إلى الرمثا وبالتالي لم يبقى في مصنع الزرقاء أية وحدة.

- 5- ننقل (600) وحدة من مصنع اربد إلى مخازن الرمثا وعليه أصبحت حاجة الرمثا صفراً ولم يبقى في مصنع اربد أية وحدة.
- 6- بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في حالة توازن وهذا يمني أن جدولة النقل قد اكتملت.
- 7- يتم بعدها احتساب قيمة التكاليف الإجمالية المعبر عنها بدالة الهدف في حالة تخفيض التكاليف وهي مجموع حاصل ضرب عدد الوحدات المنقولة بكلفة نقلها.

Min, $Z = 300 \times 31 + 100 \times 21 + 800 \times 21 + 200 \times 30 + 600 \times 15$ = 43200

2- طريقة أقل التكاليف:

تعتبر هذه الطريقة أفضل من الطريقة السابقة لأنها تأخذ بعين الاعتبار الأقل تكلفة، وحتى نحصل على الحل الأساسي الأولي الممكن بهذه الطريقة علينا في البداية أن نتأكد من أن جدول النقل في حالة توازن ثم نتبع الخطوات التالية:

- أ- نبدأ بتزويد المربع ذا التكلفة الأقل بأكبر ما يمكن من عدد الوحدات من المخزون المقابل لهذا المربع.
- ب- نتابع ملى المربعات ذات التكلفة الأقل بالتتابع إلى أن نزود جميع مراكز التوزيع من المصادر المتوفرة.
 - ج- نحسب التكلفة الإجمالية للمربعات المختلفة.

ولتوضيح هذه الطريقة سنعمل على حل مشكلة نقل منشأة زيد السابقة والمجدولة كما يلي:

لذلك يتم نقل (200) وحدة من عمان إلى الأزرق ليبقى رصيد عمان (200) وحدة ورصيد مخازن الأزرق صفراً.

5- بقي أن ننقل (200) وحدة من عمان إلى مخازن الرمثا على الرغم من أن تكلفة النقل من عمان إلى الرمثا كبيرة والسبب هو لعدم وجود طاقة استيمابية في كل من الأزرق والعقبة.

وعند وضع هذه الخطوات على الجدول السابق، يظهر لنا كما يلي:

| المرأكز | العقبة | الأزرق | الرمثا | عرض المصدر |
|-------------|--------|--------|--------|------------|
| المصادر | | | | · |
| عمان | 31 | 21_ | 42 | 400 290 |
| | | 200 | 200 | |
| الزرقاء | 20 | 21 | 30 | 1000 700 |
| | 300 | 700 | | |
| أريد | 23 | 20 | 15 | 600 |
| | | | 600 | - |
| طلب المراكز | 300 | 900 | 800 | 2000 |
| | | 300 | 360 | |

حيث تحقق الحل الأولي لأنه تم نقل جميع وحدات المرض لتلبية وإشباع جميع الطلب.

6- نحسب التكلفة الكلية والتي هي:

$$Min.Z = (21)(200) + (42)(200) + (20)(300) + (21)(700) + (15)(600)$$
$$= 42300$$

| المراكز المصادر | المقبة | الأزرق | . الرمثا | عرض المسدر |
|-----------------|--------|--------|----------|------------|
| عمان | 31 | 21 | 42 | 400 |
| الزرقاء | 20 | 21 | 30 | 1000 |
| اريد | 23 | 20 | 15 | 600 |
| طلب المراكز | 300 | 900 | 800 | 2000 |

نلاحظ في هذا الجدول أن:

- 1- أقل تكلفة نقل هي بين إربد والرمثا والمساوية (15) دينار، الأمر الذي يتطلب نقل (600) وحدة من اربد إلى مخازن الرمثا والمقابل بقي في الرمثا طاقة استيمابية مقدارها (200).
- 2- ثاني أقل تكلفة هي بين الزرقاء إلى العقبة وبين اربد إلى الأزرق وبالتالي نقل (300) وحدة من الزرقاء إلى العقبة التي أصبحت طاقتها الاستيعابية مساوية للصفر بينما بقي في الزرقاء (700) وحدة. وحيث أن كافة عرض اربد قد فرغ في الرمثا لأن كلفتها الأقل، فلا داعي لنقل بضائع من اربد إلى الأزرق.
- 3- تكلفة نقل البضائع من الزرقاء إلى الأزرق هي (21) ديناراً، وحيث أنه قد بقي في مركز الزرقاء (700) وحدة، فيجب نقلهم إلى الأزرق ليصبح رصيد الزرقاء صفراً والطاقة الاستيعابية لمخازن الأزرق أصبحت (200).
- 4- تكلفة نقل البضائع من عمان إلى الأزرق هي (21) ديناراً، وحيث أن عرض عمان (400) وحدة والطاقة الاستيعابية لمخازن الأزرق المتبقية هي (200)،

| إلى | العقبة | الأزرق | الرمثا | عرض المصدر |
|-------------|--------|--------|--------|------------|
| ، من | | | | |
| عمان | 31 | 21 | 42 | 400 |
| الزرقاء | 20 | 21 | 30 | 1000 |
| اريد | 23 | 20 | 15 | 600 |
| طلب المراكز | 300 | 900 | 800 | 2000 |

الحل:

أ- نجد كلفة الجزاء وذلك بحساب الفرق بين أقل تكلفتين غير متساويتين في كل صف وعمود كما يلي:

| إلى | العقبة | الأزرق | الرمثا | كلفة الجزاء للصفوف |
|---------------------|--------|--------|--------|-----------------------|
| عمان | 31 | 21 | 42 | 10 |
| الزرقاء | 20 | 21 | 30 | 1 |
| اريد | 23 | 20 | 15 | . 5 |
| كلفة الجزاء للأعمدة | 3 | 1 | 15 | |

ب- نحتار أكبر جزاء في الأعمدة والصفوف وهي (15).

نلاحظ هنا بأن إجمالي التكاليف باستخدام طريقة أقل التكاليف قد انخفض بمقدار (900) دينار عن إجمالي التكاليف بطريقة الركن الشمالي الغربي.

3- طريقة فوجل التقريبية:

تعتبر هذه الطريقة من أكثر الطرق المستخدمة أهمية لأنها تعطي حلاً أقرب إلى الحل الأمثل. فغالباً ما يكون الحل الأولي هو الحل الأمثل. وللوصول إلى الحل الأولي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- أ- إيجاد كلفة الجزاء، وهي حاصل الفرق بين أقل كلفتين غير متساويتين في كل صف وفي كل عمود مع ملاحظة انه إذا توافق في أي عمود أو صف تكلفتين متساويتين لا يؤخذ الفرق بينهما.
- ب- نختار أكبر جزاء من بين الصفوف والأعمدة وفي حالة تساوي أكثر من قيمة واحدة نختار واحدة منهما.
- ج- تحديد الخلية التي تحتوي على أقل كلفة في الصف أو العمود الذي تم اختياره في الخطوة السابقة ثم يتم مقارنة احتياجات مركز الاستلام المناظر لها مع الكمية المتوفرة في مركز التوزيع.
- د- اختيار أصغر الكميتين في الخطوة السابقة وتوضع في الخلية المختارة ثم بعد ذلك يحذف الصف أو العمود المقابل لأصغر الكميتين.
- ه- إعادة الخطوات السابقة إلى أن يتم توزيع جميع الكميات المتوفرة في مراكز التوزيع على مراكز الاستلام.

ولتوضيح هذه الطريقة سنعمل على حل مشكلة نقل منشأة زيد السابقة والمجدولة كما يلى:

| إلى | | المقية | | الأزرق | | الرمثا | عرض | كلفة جزاء | كفة جزاء | كلفة جزاء |
|-----------|----|--------|----|--------|----|-------------|------|-----------|----------|-----------|
| in | | | | | | | | الصفوف | الصفوف | الصفوف |
| عمان | | 31 | | 21 | | 42 | 400 | 10 | 10 | 10 |
| | | | 40 | 0 | | | | | | - |
| الزرقاء | | 20 | | 21 | | 30 | 1000 | 1 | 1 | 1 |
| | 30 | 0 | 50 | 0 | 20 | 00 | | | | |
| اربد | | 23 | | 20 | | 15 | 600 | 5 | | |
| | | | | | 60 | | | | | |
| الطلب | 3 | 100 | 9 | 900 | | 800 | 2000 | , | | |
| | | | | | | | | , | | |
| كلفة جزاء | | 3 | | 1 | (| 15) | | • | | |
| الأعمدة | | | | | | | | | | |
| كلفة جزاء | | 11 | | 0 | (| 12) | | | | |
| الأعمدة | | | | | | | | | | , |
| كلفة جزاء | (| 11) | | 0 | | | | | | |
| الأعمدة | | | | | | | | | | |

ثم نحسب التكلفة الإجمالية لهذه المسألة وهي:

Min.Z = (21)(400) + (20)(300) + (21)(500) + (30)(200) + (15)(600)= 39900

وعند مقارنة النتائج بين الطرق الثلاثة نجد أن طريقة هوجل قد حققت أقل التكاليف.

ج- نختار أصفر كلفة في عمود أو صف الجزاء.

في مثالنا هذا، فإن عمود الرمثا هو عمود الجزاء وأصغر تكلفة فيه تساوي (15) وهذه الخلية يجب ملئها أولاً كما في الخطوة التالية.

د- مقارنة احتياج مركز الاستلام مع الكمية المتوفرة في مركز التوزيع ونختار الأصغر وتوضع في الخلية المختارة ثم يحذف الصف أو العمود المقابل لأصغر الكميتين كما يظهر في الجدول التالي:

| إلى | العقبة | الأزرق | الرمثا | |
|---------------------|--------|--------|--------|------|
| من | | | | |
| عمان | 31 | 21 | 42 | 400 |
| الزرقاء | 20 | 21 | 30 | 1000 |
| اربد | 23 | 20 | 600 | 696 |
| كلفة الجزاء للأعمدة | 300 | 900 | 800 | 2000 |

هـ- إعادة الخطوات السابقة إلى أن يتم توزيع جميع كميات مراكز التوزيع على مراكز الاستلام.

الله ملاحظة:

إن إعادة الخطوات السابقة لا تتطلب عمل جدول خاص لكل خلية فكثرة الجداول قد تولد خطأ في عملية التوزيع لذلك يفضل استخدام الأسلوب التالي:

| المراكز المصادر | العقبة | الأزرق | الرمثا | عرض المصدر |
|-----------------|--------|--------|--------|------------|
| عمان | O 31 | 200 | 200 | 400, 3 |
| الزرفاء | 300 | 700 | 30 | 1000 |
| اريد | 23 | 20 | 600 | 600 |
| طلب المراكز | 300 | 900 | 800 | 2000 |

نلاحظ في هذا الجدول أن كثيراً من المسارات غير مستخدمة، وهذه الطريقة تقوم على أساس تقيم الفعالية الاقتصادية لهذه المسارات لإظهار تأثيرها في حال استخدامها أملاً في تحقيق العل الأمثل. فإذا وجد أن ملء خلية فارغة سيؤدي إلى تقليل تكاليف النقل فإن جدول النقل يتم تعديله للاستفادة من ذلك.

خطوات تحسين الحل الأساسي الأولي بطريقة المسار المتعرج:

1- يتم رسم مسار مغلق يبدأ بالمتغيرات غير الأساسية (الخلايا غير المشغولة) يمر على عدد من المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) بحركة أفقية أو عامودية على أن لا يزيد عدد المتغيرات في كل اتجاه أفقي أو عامودي على متغيرين أساسيين.

2- يبدأ المسار المغلق بإشارة موجب (+) للمتغير غير الأساسي تعقبها إشارات سالب، موجب، سالب... أي تعطي إشارة (+)، (-) بالتعاقب للخلايا ابتداءً

نلاحظ في هذه المشكلة أن مجموع قيم العرض مساوية لمجموع قيم الطلب أي أنها مشكلة نقل متوازنة. لكن في بعض الحالات قد تكون هذه القيم غير متساوية وبالتالي يكون النموذج غير متوازن، ولكي نوازنه نضيف إلى الطرف الأقل قيمة الفرق وبتكلفة موازية لها مساوية للصفر. فإذا كان العرض أكبر من الطلب فإننا نضيف إلى الجدول عمود آخر تكون فيه التكاليف مساوية للصفر، وإذا كان العكس، فإننا نضيف إلى الجدول صف آخر بتكاليف مساوية للصفر ثم نحل النموذج بأي طريقة من الطرق الثلاث السابقة.

اختيار أمثلية الحل الأولي:

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى لاختيار هل الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل؟ وهل هو الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه أم أن هناك حلولاً أمثل منه؟

هناك طريقتان لاختبار أمثلية الحل هما:

أ- طريقة المسار المتعرج (التخطي).

ب- طريقة التوزيع المعدل (عوامل الضرب).

علما بأن تحسين الحل بالطريقتين يتطلب أن تكون مشكلة النقل في الحل الأساسي الأولي مستوفاة للشرط التالي:

[عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) = عدد الصفوف + (عدد الأعمدة - 1)].

وأما إذا لم يتحقق هذا التساوي فإن مشكلة النقل تكون حالة خاصة تسمى انحلال الحل.

أ- أمثلية الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج (التخطي):

بالرجوع إلى جدول الحل الأساسي الأولي المقبول لمنشأة زيد باستخدام طريقة أقل التكاليف والذي ظهر كما يلي:

| المراكز المصادر | المقبة | الأزرق | الرمثا | عرض المصدر |
|-----------------|--------|--------|--------|------------|
| عمان | O 31 | 200 | 200 | 400 |
| الزرقاء | 300 | 700 | 30 | 1000 |
| . اربد | 23 | 20 | 600 | 600 |
| طلب المراكز | 300 | 900 | 800 | 2000 |

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل مستخدماً طريقة المسار المتعرج.

الحل:

إن تحسين الحل بطريقة المسار المتعرج أو بطريقة التوزيع المعدل يتطلب أن تكون مشكلة النقل في الحل الأولي مستوفية للشرط التالي:

[عدد المتغيرات الأساسية = عدد الصفوف + (عدد الأعمدة - 1)]

(1-3)+3=5

2 + 3 = 5

5 = 5

وحيث أن هذه المشكلة قد استوفت هذا الشرط فيمكن الانتقال إلى مرحلة تحسين الحل.

نلاحظ في جدول الحل الأساسي وجود أربعة متغيرات غير أساسية (خلايا غير مشغولة) وبالتائي يمكن اعتماد أربعة مسارات جديدة هي:

من المتغير غير الأساسي المرسوم له المسار المغلق ولغاية آخر خلية في المسار بحيث تقع الخلايا المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق. أما المتغيرات الأساسية الأخرى التي لا تمثل زوايا في المسار فإن قيمتها تبقى كما هي بدون تغيير.

3- احتساب دليل التحسين وذلك من خلال حاصل الفرق بين مجموع تكاليف المتغيرات ذات المتغيرات ذات الإشارة الموجبة مطروحاً منها جميع التكاليف للمتغيرات ذات الإشارة السالبة في المسار الواحد. مع ملاحظة أنه إذا كانت التكلفة غير المباشرة لخلية ما بالسالب فإن ذلك يعني أن شغل تلك الخلية سيؤدي إلى خفض تكاليف النقل.

4- تكرار الخطوات (1-3) على جميع المتغيرات غير الأساسية (غير المشغولة). 5- التحقق من أمثلية الحل.

أ- إذا كانت كافة قيم التحسين موجبة أو صفرية فإن الحل يكون امثلاً، أي يجب أن تكون التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة قيمة موجبة أو مساوية للصفر.

ب- إذا كانت هناك قيم سالبة فهذا يعني أن إمكانية تحسين الحل المتمثل في خفض التكاليف وارد شريطة اختيار أكبر قيمة سالبة لأنها تساهم بشكل أكبر في تحسين الحل. ففتح مسارات جديدة للنقل يتم على هذا الأساس.

مثال:

الجدول التالي يمثل جدول الحل الأولي بطريقة أقل التكاليف لمنشأة زيد.

السار الثالث (اربد - الأزرق)

| | الأزرق | الرمثا | | لأزرق | 71 | مثا | الر |
|---------|--------|--------|---------|-------|----|------|-----|
| عمان | 21 | 42 | عمان | | 21 | - AF | 42 |
| | 199 | 201 | | 200 | | 200 | |
| الزرقاء | | | الزرقاء | | 21 | | 30 |
| | | | | 700 | | 0 | |
| اربد | 20 | 15 | اربد | | 20 | | 15 |
| | +1 | 599 | | 0 | | 600 | |

وبالتالي فإن التأثير في التكاليف (دليل التحسين) يساوي:

$$+20 - 15 + 42 - 21 = +26$$

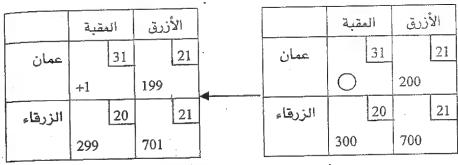
أي أن فتح هذا المسار الجديد يؤدي إلى زيادة التكاليف بمقدار (26) دينار عند نقل كل وحدة مما يجعل فتح هذا المساء غير اقتصادي.

السار الرابع (اربد - العقبة)

| | العقبة | الأزرق | الرمثا | | | العقبة | الأزرق | الرمثا |
|---------|--------|--------|--------|---|---------|--------|--------|--------|
| عمان | | 21 | 42 | | عمان | | 21 | 42 |
| | | 199 | 201 | 4 | | | 200 | 200 |
| الزرقاء | 20 | 21 | | | الزرقاء | 20 | 21 | |
| | 299 | 701 | | | | 300 | 700 | |
| اربد | 23 | | 15 | | اربد | 23 | | 15 |
| | +1 | | 599 | | | 0 | | 600 |

وبناء عليه فإن التأثير في التكاليف (دليل التحسين) يساوي:

المسار الأول (عمان - العقبة).



وبالتالي فإن التأثير في التكاليف (دليل التحسين) يساوي:

ومن قيمة التأثير في التكاليف هذه يتضح بان فتح مسار جديد بين عمان والعقبة يؤدي إلى زيادة التكاليف بمقدار (11) دينار عند نقل كل وحدة مما يجعل فتح هذا المسار غير اقتصادي.

المسار الثاني (الزرقاء - الرمثا)

| | الأزرق | 1 | لرمث | II | | ُزر <i>ق</i> | וצ | مثا | الر |
|---------|--------|----|----------|----|---------|--------------|----|-----|-----|
| عمان | 2 | :1 | | 42 | عمان | | 21 | | 42 |
| | 201 | 19 | 9 | | | 200 | | 200 | |
| الزرقاء | 2 | 1 | | 30 | الزرقاء | | 21 | | 30 |
| | 699 | +1 | L | | | 700 | | 0 | |

وبالتالي فإن التأثير في التكاليف (دليل التحسين) يساوي:

$$+30 - 42 + 21 - 21 = -12$$

يتضح من قيمة التأثير في التكاليف أن فتح مسار جديد بين الزرقاء والرمثا يؤدي إلى خفض التكاليف بمقدار (12) دينار عند نقل كل وحدة مما يجعل فتح هذا المسار اقتصادي.

| المراكز | مقبة | ال | زرق | الأ | رمثا | ائر | ض الصدر | عر |
|-------------|------|----|-----|-----|------|-----|---------|----------------|
| المصادر | | | | | | | | |
| عمان | | 31 | | 21 | | 42 | 400 | 4 ¹ |
| | 0 | | 400 | | 0 | | | A |
| الزرقاء | | 20 | | 21 | | 30 | 1000 | |
| | 300 | | 500 | : | 200 | | | |
| اريد | | 23 | | 20 | | 15 | 600 | |
| | 0 | | 0 | | 600 | | | |
| طلب المراكز | 300 | 0 | 90 | 0 | 80 | 0 | 2000 | |

ودالة الهدف تساوى:

$$Min.Z = (400)(21) + (300)(20) + (500)(21) + (200)(30) + (600)(15)$$
$$= 39900$$

وعند مقارنة هذه النتيجة مع تلك المتحققة جراء استخدام طريقة أقل التكاليف عند التكاليف عند التكاليف عند تحسين الحل مقداره (2400) دينار.

لكن السؤال الذي يثار هنا، هل هذا هو الحل الأمثل؟

الجواب: قد يكون هو الحل الأمثل وقد لا يكون، والإجابة الصريحة لهذا السؤال تكون من خلال إعادة الخطوات السابقة لاحتساب أدلة تحسين جديدة والتي ستظهر كما يلي:

- المسار الأول (عمان - العقبة).

ودليل التحسين يساوي:

+23 - 20 + 21 - 21 + 42 - 15 = +30

أي أن فتح هذا المسار سيؤدي إلى زيادة التكاليف بمقدار (30) دينار عند نقل كل وحدة مما يجعل فتح هذا المسار غير اقتصادي.

وعند تفريخ دلائل التحسين للمسارات الأربعة في جدول الحل الأولي المقبول يظهر كما يلي:

| المراكز | العقية | الأزرق | الرمثا | عرض المصدر |
|-------------|--------|--------|--------|------------|
| المصادر | | | | |
| عمان | 31 | 21 | 42 | 400 |
| | +11 | 200 | 200 | |
| الزرقاء | 20 | 21 | 30 | 1000 |
| | 300 | 700 | (B). | |
| اربد | 23 | 20 | 15 | 600 |
| | +30 | +26 | 600 | |
| طلب المراكز | 300 | 900 | 800 | 2000 |

نلاحظ وجود دليل تحسين واحد سالب فقط وهذا يعني أن شغل هذه الخلية سيؤدي إلى خفض التكاليف من خلال نقل (200) وحدة من الزرقاء إلى الأزرق (500) ونقل (200) وحدة من الرمثا إلى الأزرق ليصبح في الأزرق (400). أي أن جدول الحل هو كما يلي:

Ui + Vj = Cij

حيث: Cij تمثل تكلفة كل خلية مشغولة تقع في الصف i والعمود أ.

Ui: تمثل مركز العرض.

iV: تمثل مركز الطلب.

3- نقوم بحل المعادلات في الخطوة الثانية بطريقة التعويض.

4- احتساب دليل التحسين eij (التكلفة غير المباشرة).

ويعني ذلك تقييم كل خلية مشفولة باستخدام المعادلة التالية:

eij = Cij - Ui - Vj

لتحديد مقدار التغير في التكاليف من جراء استخدام المسار غير المستخدم في الحل الأولي.

5- اختيار دليل التحسين ذا أعلى قيمة سالبة.

وهنا يجب رسم مسار مغلق كما في طريقة المسار المتعرج لتحديد المتغير الخارج وعدد الوحدات الواجب نقلها.

6- احتساب قيمة دالة الهدف لإظهار مدى التخفيف في التكاليف جراء إدخال متغير إلى الخلية غير المشغولة في الحل.

7- تحسين الحل.

ويتم ذلك بتكرار الخطوات من (2-6) على جميع المتغيرات غير الأساسية (غير المشغولة) لإظهار فيما إذا كان هناك إمكانية لتحسين الحل. فإذا كانت كافة دلائل التحسين موجبة فهذا يعني أن جدول الحل الأخير يمثل جدول الحل الأمثل.

نلاحظ أن الفرق بين طريقة المسار المتعرج وطريقة التوزيع المعدل هو في أسلوب الوصول إلى دلائل التحسين أما باقي الخطوات فهي متماثلة.

+31 - 20 + 21 - 21 = +11

- المسار الثاني (عمان - الرمثا)

ودليل التحسين يساوي:

+42 - 21 + 21 - 30 = +12

- المسار الثالث (اربد - الأزرق)

دليل التحسين يساوي

+20 - 21 + 30 - 15 = +14

- المسار الرابع (اربد - العقبة)

دليل التحسين يساوي

+23 - 20 + 30 - 15 = +18

وحيث أن كافة قيم دلائل التحسين أكبر أو تساوي صفر، فإن دالة الهدف أعلاه تمثل الحل الأمثل.

ب- أمثلية الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدل (عوامل الضرب):

إن هدف هذه الطريقة لا يختلف عن هدف طريقة المسار المتعرج والمتمثل في تقيم الفعالية الاقتصادية للمسارات غير المستخدمة لإظهار تأثيرها في حالة استخدامها أملاً في تحقيق الحل الأمثل. إلا أن ما يميز هذه الطريقة عن السابقة هو عدم الحاجة إلى رسم جميع المسارات المتعرجة مما ينتج عن ذلك اختصار في الجهد والوقت. ويتم إنباع الخطوات التالية لاستخدام هذه الطريقة:

1- التأكد من أن عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) يساوي عدد الصفوف + (عدد الأعمدة - 1).

2- يتم تكوين عدة معادلات بواقع معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الأولي ويتم إعداد كل خلية على أساس العلاقة التالية:

(1-3)+3=5

2 + 3 = 3

5 = 5

وصيت أن مشكلة النقل قد استوفت هذا الشرط فيمكن الانتقال إلى الخطوة الثانية.

الخطوة الثانية:

تكوين معادلات بواقع معادلة لكل خلية مشغولة كما يلي:

$$Ui + Vj = Cij$$

$$U_1 + V_2 = 21$$
(1)

$$U_1 + V_3 = 42$$
(2)

$$U_2 + V_1 = 20 \dots (3)$$

$$U_2 + V_2 = 21 \dots (4)$$

$$U_3 + V_3 = 15$$
(5)

الخطوة الثالثة:

حل المعادلات أعلاه بطريقة التعويض.

بما أن عدد الأعمدة والصفوف في هذه المشكلة يساوي سنة، فهذا يمني وجود سنة مجاهيل هي $U_1,\,U_2,\,U_3,\,V_1,\,V_2,\,V_3$

في حين أن عدد المعدلات يساوي خمسة فقط، لذلك نعتبر قيمة أحد المجاهيل مساوياً للصفر وعادة يكون المتغير الأول .U.

$$U_1 + V_2 = 21 \dots (1)$$

 $U_1 = 0$

 $V_2 = 21$

$$U_1 + V_3 = 42$$
(2)

مثال:

بالرجوع إلى حدول الحل الأساسي الأولي لمنشأة زيد والمستخرج بطريقة أقل التكاليف والذي يظهر كما يلي:

| المراكز | العقبة | الأزرق | الرمثا | عرض المصدر |
|-------------|--------|--------|--------|------------|
| للصادر | | | , | |
| عمان | 31 | 21 | 42 | 400 |
| | 0 | 200 | 200 | |
| الزرقاء | 20 | 21 | 30 | 1000 |
| | 300 | 700 | 0 | |
| اربد | 23 | 20 | 15 | 600 |
| | 0 | 0 | 600 | |
| طلب المراكز | 300 | 900 | 800 | 2000 |

المطلوب: تحسين الحل الأساسي الأولي بطريقة التوزيع المعدل حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

الحل:

الخطوة الأولي:

إن تحسين الحل بطريقة التوزيع المعدل يتطلب أن تكون مشكلة النقل في الحل الأولي مستوفية للشرط التالي:

عدد المتغيرات الأساسية = عدد الصفوف + (عدد الأعمدة - 1)

$$e_{32} = C_{32} - U_3 - V_2$$

$$20 - (-27) + 21 = +26$$

4- إربيد - العقبة

$$e_{31} = C_{31} - U_3 - V_1$$

$$23 - (-27) - 20 = +30$$

ويمقارنة دلائل التحسين هذه مع ما سبق الحصول عليه عند تقييم جدول الحل الأولي باستخدام طريقة المسار المتعرج يتضح لنا تطابق النتائج في الطريقتين ثم نتابع الحل كما في طريقة المسار المتعرج حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

$$U_1 = 0$$

$$V_3 = 42$$

$$U_2 + V_2 = 21 \dots (4)$$

$$U_2 + 21 = 21$$

$$U_2 = 0$$

$$U_2 + V_1 = 20 \dots (3)$$

$$0 + V_1 = 20$$

$$V_1 = 20$$

$$U_3 + V_3 = 15$$
(5)

$$U_3 + 42 = 15$$

$$U_3 = -27$$

الخطوة الرابعة:

احتساب دليل التحسين من خلال المعادلة:

وحيث أن لدينا أربعة مسارات غير مستخدمة في الحل الأولي هي: 1- عمان - العقبة.

$$e_{11} = C_{11} - U_1 - V_1$$

$$30 - 0 - 20 = +11$$

$$e_{23} = C_{23} - U_2 - V_3$$

$$30 - 0 - 42 = -12$$

| المراكز | Dı | D_2 | D_3 | D_4 | عرض |
|----------------|------------|-------|-------|-------|-----|
| المراكر | <i>D</i> 1 | | | | |
| $S_{1,}$ | 2 | 3 | 7 | 11 | 150 |
| S_2 | 0 | 12 | 5 | 6 | 125 |
| S ₃ | 14 | 1 | 3 | 9 | 75 |
| S ₄ | 10 | 2 | 5 | 8 | 50 |
| الطلب | 100 | 20 | 80 | 200 | 400 |

المطلوب: ١- إيجاد الحل الأولي باستخدام الطرق الثلاثة.

2- إيجاد التكاليف الإجمالية حسب كل طريقة والمقارنة بينهم. س3: الجدول التالي يمثل مصفوفة التكاليف من المصادر إلى مراكز التوزيع وكذلك يبين إمكانيات المصادر واحتياجات المراكز.

| - J- J | • - | | | |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|
| المراكز المصادر | D1 | D2 | D3 | عرض |
| \$ ₁ | 2 | 4 | 0 | 150 |
| S ₂ | 3 | 1 | 5 | 200 |
| S ₃ | 6 | 2 | 4 | 325 |
| S4 | 9. | 7 | 1 | 25 |
| الطلب | 180 | 320 | 200 | 700 |

المطلوب: 1- إيجاد الحل الأولي المكن مستخدماً طريقة هوجل التقريبية.

2 - اختبر الحل إن كان أمثلاً بطريقة المسار المتمرج وطوره للوصول للحل الأمثل إذا لم يكن كذلك.

أسئلة الوحدة الخامسة

س1: إليك مشكلة النقل التائية في صيفتها الجدولية.

| المراكز | X | Y | Z | عرض |
|--------------|----|----|----|-----|
| المصادر A | 8 | 12 | 3 | 20 |
| В | 10 | 6 | 11 | 15 |
| C | 1 | 4 | 8 | 10 |
| D | 7 | 11 | 5 | 25 |
| الطلب | 30 | 25 | 15 | 70 |

المطلوب:

أ- إيجاد الحل الأولي الممكن مستخدماً طريقة الركن الشمالي الغربي. ب- إيجاد التكلفة الإجمالية لهذه المشكلة.

س2: الجدول التالي يبين تكلفة نقل الوحدة الواحدة من سلعة معينة من أربع مصادر إلى أربع مراكز طلب، وكذلك يبين إمكانيات المصادر واحتياجات المراكز.

مشكلةالنقل =

الوحدة السادسة مشكلة التعيين أو التخصيص The Assignment Problem س4؛ المصفوفة التالية تمثل مصفوفة التكلفة لمسألة نقل ومبين عليها إمكانيات المصادر واحتياجات المراكز.

| المراكز | D_1 | D_2 | D_3 | D_4 | عرض |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| المصادر | | 2 | 7 | 6 | 5000 |
| Sı | | | | L | |
| S ₂ | 7 | 5 | 2 | 3 | 6000 |
| S ₃ | 2 | 5 | 4 | 5 | 2500 |
| الطلب | 6000 | 4000 | 2000 | 1500 | 13500 |

المطلوب:

1- إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة أقل التكاليف.

2- إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل.

س5: فيما يلي جدول الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية

| المراكز | D_1 | D_2 | D_3 | العرض |
|----------------|--------------------|-------|-------|-------|
| المصادر | | | | |
| S ₁ | 5 | 1 | 8 | 12 |
| | 9 | 3 | 0 | |
| S ₂ | $\frac{2}{2}$ | 4 | | . 14 |
| | | / | / | A |
| S_3 | $\log \frac{1}{3}$ | 0 6 | 4 | 4 |
| الطلب | 9 | 10 | 11 | 30 |

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج.

مقدمة:

تعتبر مشكلة التخصيص إحدى الحالات الخاصة لمشكلة النقل إلا أنها تختلف هن مشكلة النقل بأن عملية التخصيص تتم على أساس تخصيص عامل واحد لعمل واحد أو بائع واحد لمنطقة جغرافية واحدة...الخ أي أن هذه المشكلة تدور حول تخصيص عدد معين من العمال إلى نفس العدد من الأعمال أو عدد معين من الباعة إلى نفس العدد من المناطق أو عدد معين من الآلات إلى نفس العدد من السلع... الخ وذلك بالشكل الذي يؤدي إلى التخصيص الأمثل والذي من شأنه أن يحقق أدنى التكاليف أو أعلى الأرباح.

وحيث أن مشكلة التخصيص تتم على أساس عامل واحدٌ لعمل واحد أو جهاز واحد لوظيفة واحدة ... الغ لذلك يُعبر عن مشكلة التخصيص بمصفوفة مربعة (عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة) حيث:

- أ- الصفوف تمثل الوسائل (العمال، الأجهزة، ... الخ).
- ب- الأعمدة تمثل المهام (الوظائف الواجب تحقيقها).
- ج- الأرقام التي تمثل نقاط التقاء الصف مع العمود تمثل التكاليف.

لذلك فإن مشكلة التخصيص تتميز بالخصائص التالية:

- 1- أن عدد الوسائل يساوي عدد المهام.
- 2- تخصيص كل وسيلة لمهمة واحدة فقط.
- 3- تكون التكانيف محددة مسبقاً لهذا فإن مصفوفة مشكلة التخصيص تسمى مصفوفة التكانيف.
 - 4- تعتمد عملية التخصيص الأعداد الصحيحة.

| المهام "إدارة مشاريع" | المشاريح | | |
|-----------------------|----------|----|---|
| الوسائل "مدراء" | A | В | С |
| على | 9 | 13 | 7 |
| عمر | 14 | 14 | 6 |
| عمران | 10 | 13 | 8 |

والذي يُشير إلى وجود ثلاثة مدراء بمهارات مختلفة لإدارة هذه المشاريع والتكانيف المقدرة من جراء توزيع هؤلاء المدار على المشاريع. وطلب منا تحديد أفضل تعيين يحقق أقل تكاليف باستخدام طريقة العدد الكامل فإن خطوات الوصول إلى هذا الهدف هي:

1- تحديد عدد البدائل المحتملة لعملية التخصيص وهي تساوي

ائل $6 = 1 \times 2 \times 3 = 13$

2- تسجيل جميع احتمالات التخصيص مع التكاليف المقابلة لكل احتمال كما في الجدول التالي:

| البدائل | Α | В | С | كلفة العمل | إجمالي التكاليف | |
|---------|-------|-------|-------|-------------|-----------------|--|
| 1 | على | عمر | عمران | 19+ 14 + 8 | 31 | |
| 2 | علي | غمران | عمر | 9 +13 + 6 | 28 | |
| 3 | غمر | علي | عمران | 14 13 + 8 | 35 | |
| 4 | عمر | عمران | علي | 14 + 13 +7 | 34 | |
| 5 | عمران | علي | عمر | 10 + 13 + 6 | 29 | |
| 6 | عمران | عمر | علي | 10 + 14 +7 | 31 | |

نلاحظ من هذا الجدول بان عملية التخصيص الأمثل الذي يساعد الشركة في تخفيض التكاليف إلى أقل ما يمكن يتم من خلال تخصيص المدير على على المشروع (B) والمدير عمران على المشروع (B) والمدير عمران على المشروع (C) لان هذا التخصيص يحقق أقل تكاليف وهي (28) ديناراً.

طرق التخصيص Assignment Methods:

هناك مجموعة من الطرق يمكن استخدامها في حل مسائل التخصيص نها:

أ- طريقة البرمجة الخطية.

ب- طريقة النقل.

ج- طريقة العدد الكامل (التوافيق).

د- الطريقة الهنجارية.

وبحثنا هنا سيقتصر على طريقة العدد الكامل والهنجارية فقط.

1- طريقة العدد الكامل (التوافيق):

تعتبر هده الطريقة من أبسط الطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص وتعتمد على عدد المرات التي يمكن بها التوافق بين البدائل. حيث عدد البدائل المحتملة لكل مشكلة تخصيص تساوي مضروب عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، فإذا كان عدد الصفوف أو الأعمدة يساوي ثلاث مثلاً، فإن عدد البدائل المحتملة لعملية التخصيص تساوي $2 \times 2 \times 1 = 6$ بدائل

آلية عمل طريقة العدد الكامل:

إِنْ آلية عمل هذه الطريقة تتطلب القيام بالخطوات التالية:

1- استخراج عدد البدائل المحتملة لعملية التخصيص.

2- تسجيل جميع احتمالات التخصيص مع التكاليف المقابلة لكل احتمال.

3- اختيار البديل الأمثل.

قلو كان لدينا مصفوفة التكاليف التالية:

ستال:

شركة ترغب في تعيين ثلاث عمال لإنجاز ثلاث وظائف، فإذا كانت الأرباح الناجمة عن القيام بهذه الوظائف مبينة في الجدول التالي:

| المهام "إدارة مشاريع" | | المشاريع | |
|-----------------------|---|----------|-----|
| "الوسائل "مدراء" | A | В | · C |
| X | 6 | 15 | 4 |
| Y | 9 | 7 | 6 |
| Z | 7 | 1 | 11 |

المطلوب: استخدام طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تعيين يحقق أعظم ربح ممكن.

الحل:

1- عدد البدائل المحتملة لعملية التخصيص هي:

 $6 = 1 \times 2 \times 3 = 13$ پدائل

2- إن جميع احتمالات التخصيص مع التكاليف المقابلة لكل احتمال هي:

| | - البدائل | A | В | С | كلفة العمل | إجمالي التكاليف |
|---|-----------|---|---|---|-------------|-----------------|
| | 1 | х | у | Z | 6+7+11 | 24 |
| I | 2 | х | Z | У | 6+1+6 | 13 |
| - | 3 | у | х | Z | 9 + 15 + 11 | 35 |
| | 4 | У | Z | х | 9 + 1 + 11 | 21 |
| | 5 | Z | х | у | 7 + 15 + 6 | 28 |
| | 6 | Z | У | Х | 7 + 7 + 4. | 18 |

نلاحظ من هنذا الجدول بأن عملية التخصيص الأمثل الذي يساعد الشركة في تحقيق أعظم ربح ممكن هو عندما ينجز المامل (X) الوظيفة (B) والعامل (Y) الوظيفة (A) والعامل (Z) الوظيفة (C)، ويكون إجمالي الربح الناتج عن هذا التعيين هو 35.

2- الطريقة الهنجارية:

إن من أبرز عيوب طريقة الحد الكامل أنها تستخدم فقط لإيجاد الحل الأمثل في حالة المسائل ذات المتغيرات قليلة العدد فتصبح غير كضؤة في حالة المسائل الكبيرة ذات المتغيرات الأربعة وما فوق. لهذا السبب تم تطوير أسلوب يُعد أكثر كفاءة في إيجاد الحل الأمثل على يد الرياضي المجري د. كوينج الذي بنى نموذجها وعرفت بالطريقة الهنجارية والتي تتميز بقدرتها على التعامل مع المشاكل ذات المتغيرات الكثيرة ودون الحاجة إلى إجراء مقارنات للبدائل المتاحة لاختيار البديل الأمثل الذي يحقق الحل الأمثل.

- * خطوات الوصول إلى الحل الأمثل بالطريقة الهنجارية في حالة تخفيض التكاليف:
- 1- يُعدد أصغر رقم في كل سطر من أسطر جدول كلفة التخصيص ويطرح من كافة الأرقام في نفس السطر وتوضح النتائج في جدول جديد يسمى جدول الكلفة المعدل رقم (1) أو مصفوفة المراجعة المبدئية.
- 2- يُحدد أصغر رقم في كل عمود من أعمدة جدول الكلفة المعدل رقم (1) ويطرح من كافة الأرقام في نفس العمود توضح النتائج في جدول جديد آخر يسمى جدول الكلفة المعدل رقم (2) أو مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية.
- 3- نقوم باختبار مثالية الحل لجدول الكلفة المعدل رقم (2) وذلك بتغطية جميع الأصفار في جدول الكلفة المعدل رقم (2) بأقل عدد من الخطوط المستقيمة لكل من الصفوف والأعمدة مع ملاحظة أنه لا يجوز تفطية جميع الأصفار من خلال رسم الخطوط على الصفوف فقط أو الأعمدة فقط، فإذا:

المطلوب: استخدام الطريقة الهنجارية لإيجاد أفضل تخصيص يحقق أقبل تكلفة.

الحل:

1- نطرح أصغر رقم في كل سطر من أسطر جدول كلفة التخصيص للحصول على جدول الكلفة المعدل رقم (1) والذي سيظهر كما يلي:

| ماكنة عمال | A | В | С |
|------------|---|----|----|
| عمر | 8 | 24 | 0 |
| عماد | 0 | 10 | 6 |
| عمران | 0 | 16 | 12 |

2- نطرح أصغر رقم في كل عمود من كافة الأرقام في نفس العمود في جدول الكلفة المعدل رقم (1) للحصول على جدول الكلفة المعدل رقم (2) والذي سيظهر كما يلى:

| ماكنة | A | В | С |
|--------|---|----|----|
| Jlac . | | | |
| عمر | 8 | 14 | 0 |
| عماد | 0 | 0 | 6 |
| عمران | 0 | 6 | 12 |

3- نقوم باختبار مثالية الحل لجدول الكلفة المعدل رقم (2) وذلك بتغطية جميع الأصفار الواردة فيه بأقل عدد من الخطوط المستقيمة لكل من الصفوف والأعمدة كما يلي: أ- كان عدد هذه الخطوط المستقيمة مساويا لعدد الصفوف أو الأعمدة في جدول الكلفة المعدل رقم (2) نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل الأمر الذي يتطلب القيام بعملية التخصيص وذلك باختيار الصف أو العمود الذي يحتوي على فيمة صفرية واحدة وتخصيصة ثم نختصر الصفوفة بشطب صف وعمود القيمة الصفرية ثم نكور هذا المبدأ على المصفوفة المختصرة وهكذا حتى الانتهاء من عملية التخصيص ثم نأخذ القيم الأصلية المناظرة للأصفار التي خصصت من جدول كلفة التخصيص الأصلى.

ب- إذا كان عدد الخطوط المستقيمة أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة في جدول الكلفة المعدل رقم (2) فإن هذا يعني عدم التوصل إلى التخصيص الأمثل، الأمر الذي يتطلب زيادة عدد القيم الصفرية في المصفوفة ويتم ذلك باختيار أقل قيمة غير مغطاة في جدول الكلفة المعدل رقم (2) وطرحها من جميع القيم غير المغطاة ثم إضافتها إلى نقاط تقاطع الخطوط المستقيمة المغطية للقيم الصفرية. وفي حالة عدم الوصول إلى الحل الأمثل تماد هذه الطريقة إلى أن يصبح عدد الخطوط الستقيمة مساوية لعدد الصفوف أو الأعمدة فنكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل ثم نتابع بنفس طريقة الخطوة الثالثة السابقة فرع (أ).

مصنع فيه ثلاثة ماكنات، يراد استخدام عامل واحد لكل ماكنة فإذا قدرت إدارة المصنع تكاليف تشغيل العمال على هذه المكائن كما يلى:

| ماكنة | A | В | С |
|-------|----|----|----|
| عمال | | | |
| عمر | 14 | 30 | 6 |
| عماد | 10 | 20 | 16 |
| عمران | 6 | 22 | 18 |

| ة تعظيم | لة في حال | يقة الهنجاري | شل بالطر | حل الأم | صول إلى ال | خطوات الو. لأرباح: | 1 |
|---------|-----------|--------------|----------|---------|------------|---|---|
| | | i i štent | ere en e | التخمير | هدف مشكاة | قد يكون | |

قد يكون هدف مشكلة التخصيص هو تعظيم الأرباح أو الحصول على أعلى مستوى من كفاءة الإنجاز بدلاً من تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى، وفي مثل هذه الحالة فإن مشكلة التخصيص المعبر عنها بمصفوفة تمثل المصفوفة الأولية للأرباح وليس للتكاليف، ولحل مشكلة التخصيص من هذا النوع علينا اتباع الخطوات التالية:

1-تحويل المصفوفة الأولية للأرباح إلى مصفوفة تكاليف وذلك باختيار أكبر قيمة في مصفوفة الأرباح ثم طرحها من كافة القيم الواردة فيها وأخذ القيمة المطلقة لناتج الطرح.

2- إجراء نفس خطوات الحل المتبعة في حالة التصغير للوصول إلى مصفوفة يمكن تغطية كافة أصفارها بعدد من الخطوط المستقيمة مساوياً لعدد الصفوف أو الأعمدة في جدول ربح التخصيص فنكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

مثال:

مؤسسة تجارية لديها أربع رجال بيع يراد توزيعهم على أربعة مناطق مختلف فإذا كان تقدير إدارة المؤسسة للأرباح اليومية المتوقعة لكل رجل بيع في كل منطقة بعد دراسة قدراتهم وطبيعة المناطق هو كما في الجدول التالي:

| المناطق رجل البيع | W | . X | Y | Z |
|-------------------|----|-----|----|----|
| A | 16 | 10 | 14 | 11 |
| В | 14 | 11 | 15 | 15 |
| C | 15 | 15 | 13 | 12 |
| D | 13 | 12 | 14 | 15 |

| | | | | | 9 | |
|---|---------|----------|----|----|----|---|
| - | اماكنة | A | В | C | | |
| | عمال | | | | | |
| | - عمر | - 8 | 14 | 0 | 10 | 1 |
| | | | | | | 2 |
| | عماد - | . 0 | 0 | 0 | | 2 |
| | ا عمران | V | 6 | 12 | | |
| | | 3 | | | | |

وحيث أن عدد الخطوط المستقيمة التي غطت كافة الأصفار تساوي ثلاثة خطوط وهي بالمقابل مساوية لعدد الصفوف أو الأعمدة فإن هذا يعني إننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل الذي يتطلب القيام بعملية التخصيص من خلال اختيار الصف أو العمود الذي يحتوى على قيمة صفرية واحدة لتخصيصه ثم تختصر المصفوفة.

الصف الأول يحتوي على صفر واحد وهذا يعني تعيين العامل عمر على
 الماكينة C وبعد اختصار المصفوفة تصبح:

| ماكنة | A | В |
|-------|---|---|
| Ulac | | |
| عماد | 0 | 0 |
| عمران | 0 | 6 |

♦ الصف الثاني يحتوي على صفر واحد وهذا يعني تعيين العامل عمران
 على الماكينة A، وبعد اختصار المصفوفة يعين العامل الثالث عماد على الماكينة
 B. وبالتالي فإن أقل تكلفة ناجمة عن هذا التخصيص هو:

$$6 + 6 + 20 = 32$$

أ- الصف الأول يحتوي على صفر واحد وبالتالي توزيع رجل البيع A للمنطقة W. ب- الصف الرابع يحتوي أيضاً على صفر واحد وبالتالي توزيع رجل البيع D للمنطقة 7.

ج-توزيع رجل البيع C للمنطقة X.

د-توزيع رجل البيع B للمنطقة Y.

وعليه فإن أقصى ربح يمكن تحقيقه من هذا التخصيص هو:

16 + 15 + 15 + 15 = 61

مشاكل التخصيص غير المتوازنة:

لقد ذكرنا في بداية هذه الوحدة أن من بين الخصائص التي تتميز بها مشاكل التخصيص هو ضرورة تساوي عدد الوسائل مع عدد المهام. إلا أن هذا الشرط قد لا يتحقق في الحياة العملية وللتغلب على هذه المشكلة يتم استحداث صف أو أكثر وهمي إذا كان عدد الوسائل أقل من عدد المهام أو استحداث عمود أو أكثر وهمي إذا كان عدد الوسائل يفوق عدد المهام لموازنة مصفوفة التخصيص أو أكثر وهمي إذا كان عدد الوسائل يفوق عدد المهام لموازنة مصفوفة التخصيص مع إعطاء هذا الصف أو العمود تكاليف أو أرباح تساوي صفراً وبالتالي فإن إجمالي التكاليف أو الأرباح في الحل الأمثل لن يتأثر.

أ- استخدام الطريقة الهنجارية لإيجاد التخصيص الأمثل في حالة إضافة صف وهمي.

إن خطوات حل مشاكل التخصيص المضاف إليها صف وهمي في حالة تخفيض التكاليف لا تختلف عن خطوات حل مشاكل التخصيص المتوازنة إلا في الخطوة الثانية التي لا يستوجب إجراءها والتي تتطلب تحديد أصغر رقم في كل عمود من أعمدة جدول الكلفة المعدل رقم (1)لطرحه من كافة الأرقام في نفس العمود للوصول إلى جدول الكلفة المعدل رقم (2) وذلك لأن أصغر رقم في كل عمود الواجب طرحه من كافة قيم العمود تساوي صفر.

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل لرجال البيع على المناطق المختلفة وأقصى ربح يمكن تحقيقه من هذا التخصيص.

الحل:

1- حيث أن مشكلة التخصيص هو تعظيم الأرباح لذلك يجب تحويل المصفوفة الأولية للأرباح إلى مصفوفة تكاليف وذلك بطرح أكبر قيمة فيها من كافة القيم والتي هي (16) وبالتالي الحصول على المصفوفة الأولية للتكاليف والتي هي كما يلى:

| المناطق رجل البيع | W | Х | Y | Z |
|-------------------|-----|---|---|---|
| A | . 0 | 6 | 2 | 5 |
| В | 2 | 5 | 1 | 1 |
| C | 1 | 1 | 3 | 4 |
| D | 3 | 4 | 2 | 1 |

2− تحديد أصغر رقم في كل سطر ويطرح من كافة الأرقام في نفس السطر للحصول على جدول الكلفة المعدل رقم (1) التالي:

| المناطق رجل البيع | W | X | Y | Z |
|-------------------|-----|---|---|---|
| A | 0 | 6 | 2 | 5 |
| В | 1 | 4 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 2 | 3 |
| D | 2 · | 3 | 1 | 0 |

وحيث أن كافة السطور والأعمدة في جدول الكلفة المعدل رقم (1) يشتمل على أصفار فلا داعي لطرح أصغر رقم في كل عمود من كافة الأرقام في نفس العمود وعلينا فقط القيام بعملية التخصيص الأمثل كما يلي:

تنوي شركة مقاولات إنشاء أربعة مشاريع إسكانية في أربعة مناطق مختلفة، فإذا كان لدى الشركة ثلاث جرافات لحفر وتسوية هذه الأراضي، فإذا كان تقدير الشركة لتكاليف إنجاز هذه المهام بآلاف الدنانير هي كما في الجدول التالى:

| المشاريع الجرافات | المدينة (1) | المدينة (2) | المدينة (3) | المدينة (4) |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| A | 9 | 12 | 8 | 11 |
| В | 16 | 5 | 18 | 9. |
| С | - 7 | 4 | 9 | 20 |

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكاليف.

الحل:

نلاحظ في هذا المثال بأن عدد الوسائل (الجرافات) أقل من المهام (الحفر) وهذا يعني ضرورة استحداث صف وهمي لموازنة مشكلة التخصيص كما يلي:

| المشاريع الجرافات | المدينة (1) | المدينة (2) | المدينة (3) | المدينة (4) |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| A | 9 | 12 | . 8 | 11 |
| В | 16 | 5 | 18 | 9 |
| С | 7 | 4 | 9 | 20 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 |

1- طرح أصغر رقم في كل سطر من كافة الأرقام في نفس السطر للوصول إلى جدول الكلفة المعدل رقم (1) التالي:

| المشاريع | المدينة | المدينة | المدينة | الدينة (4) |
|----------|---------|---------|---------|---------------|
| الجرافات | (1) | (2) | (3) | (4) |
| · A | 1 | 4 | 0 | 3 |
| В | 11 | . 0 | 13 | 4 |
| С | 3 | 0 | 5 | 16 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 |

2- لا يتم طرح أقل فيمة في كل عمود لأنها تساوي صفر.

3- اختيار مثالية الحل بتفطية جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط المستقيمة.

| المشاريع الجرافات | المدينة (1) | المدينة (2) | المدينة (3) | المدينة (4) | |
|--|----------------|----------------|----------------|----------------|------|
| A | 1 | - | 0 | 3- | ->(1 |
| В | 11 | 0 | 13 | 4 | |
| C | 3 | 0 | 5 | 16 | _ ا |
| D | 0 | | 00 | 0 | -(: |
| The Part of the Pa | | | | 1 | • |
| | | (2) | | | |

4- حيث أن عدد الخطوط المستقيمة أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة فإن هذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل الأمر الذي يتطلب زيادة عدد القيم الصفرية بالطرق التي تعلمناها سابقاً والذي سيتولد عنها الجدول التالي:

| المشاريع الجرافات | المدينة (1) | المدينة (2) | المدينة (3) | المدينة (4) | |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| Α | 1 | 7 | 0- | 3 | - -(|
| В | 8 | 0 | 10 | ì | |
| С | 0 | - | 2 | 13 | - \ |
| D | 0 | 3 | 0 | 0 | -(|

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل الذي يحقق أقل تكاليف:

الحل:

1- إضافة عمود وهمي لتحقيق التوازن كما يلي:

| مهام وسائل | W | z | Y | Z |
|------------|----|----|---|----|
| A | 9 | 13 | 7 | 0 |
| В | 14 | 14 | 6 | 0. |
| С | 10 | 13 | 8 | 0 |
| D | 8 | 13 | 9 | 0 |

2- تحديد أصغر رقم في كل عمود وطرحه من كافة الأرقام في نفس العمود كما

| مهام وسائل | W | Z | Y | Ž | |
|------------|---|---|----|---|-----------------|
| A | 1 | ø | 1 | φ | _ |
| В | 6 | | -0 | | $\rightarrow 1$ |
| С | 2 | 0 | 2 | 0 | |
| D D | 0 | • | 3 | | → (2) |
| | • | 4 | | 3 | |

3- التخصيص:

- الوسيلة A لإنجاز المهمة X.
- الوسيلة B لإنجاز المهمة y.
- الوسيلة D لإنجاز المهمة W
- 4- أقل تكاليف من جراء هذا التخصيص هو:

13 + 6 + 8 = 27

5- حيث أن عدد الخطوط المستقيمة التي غطت كافة الأصفار تساوي أربعة خطوط وهي مساوية لعدد الصفوف أو الأعمدة فهذا يعني إننا توصلنا إلى الحل الأمثل.

6- التخصيص:

- الجرافة A تخصص لحفر وتسوية مشروع المدينة (3).
- الجرافة B تخصص لحفر وتسوية مشروع المدينة (2).
- الجرافة C تخصص لحفر وتسوية مشروع المدينة (1).
 - 7- أقل تكاليف من جراء هذا التخصيص هو:

$$8 \div 5 \div 7 = 20$$

ب- استخدام الطريقة الهنجارية لإيجاد التخصيص الأمثل في حالة إضافة عمود وهمي.

إن خطوات حل مشاكل التخصيص المضاف إليها عمود وهمي في حالة تخفيض التكاليف لا تختلف عن خطوات حل مشاكل التخصيص المتوازنة إلا في الخطوة الأولى الني لا يستوجب إجراءها والتي تتطلب تحديد أصغر رقم في كل صف من صفوف جدول كلفة التخصيص لطرحه من كافة الأرقام في نفس الصف للوصول إلى جدول الكلفة المعدل رقم (1) وذلك لأن أصغر رقم في كل صف یساوی صفر.

الجدول التالي يظهر كلفة تخصيص أربعة وسائل للقيام بثلاث مهام.

| مهام وسائل | W | X | Y |
|------------|------|----|---|
| Α | 9 | 13 | 7 |
| В | . 14 | 14 | 6 |
| С | 10 | 13 | 8 |
| D | 8 | 13 | 9 |

| | مهام وسائل | A | В | С | D |
|---|------------|------|----|----|----|
| r | . W | . 14 | 10 | 20 | 25 |
| | X | 25 | 27 | 17 | 22 |
| | Y | 18 | 12 | 21 | 42 |
| 上 | Z | 20 | 15 | 30 | 35 |

أ- لتخفيض التكاليف.

ب- لتعظيم الأرباح.

س4: ينوي مستثمر استئجار أربعة مخازن في أحد المراكز التجارية وكان أمامه خمسة مشاريع استثمارية، فإذا كانت مصفوفة الربحية كما يلي: `

| | مخزن (1) | مخزن (2) | مخزن (3) | مخزن (4) |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| المشروع (1) | 10 | 6 | 12 | 8 |
| المشروع (2) | 15 | 18 | 5 | 11 |
| المشروع (3) | 17 | 10 | 13. | 16 |
| المشروع (4) | 14 | 12 | 13 | 10 |
| المشروع (5) | 14 | 16 | 6 | 12 |

المطلوب: مساعدة هذا المستثمر في اختيار أفضل أربعة مشاريع موزعين على المخازن الأربعة مستخدماً الطريقة الهنجارية.

أسئلة الوحدة السادسة

س1: أوجد الحل الأمثل لشكلة التخصيص التالية بطريقة العد الكامل.

| مهام وسائل | A | В | С | D |
|------------|----|----|----|----|
| 1 | 32 | 18 | 32 | 26 |
| 2 | 22 | 24 | 12 | 16 |
| 3 | 24 | 30 | 26 | 24 |
| 4 | 26 | 30 | 28 | 20 |

أ- لتخفيض التكاليف،

ب- لتعظيم الأرباح.

س2: الجدول التالي يظهر تكاليف إنجاز ثلاثة وظائف على ثلاثة آلات.

| وظائف آلات | X | Y | Z |
|---------------|----|----|----|
| A | 21 | 17 | 31 |
| В | 17 | 19 | 35 |
| С | 20 | 21 | 27 |

المطلوب:استخدام طريقة العد الكامل وإجراء عملية التخصيص لتخفيض إجمالي التكاليف،

س3: أوجد الحل الأمثل لمشكلة التخصيص التالية بالطريقة الهنجارية.

الوحدة السابعة شبكات الأعمال Network Models

مقدمة:

نعلم أن العملية الإدارية تتشكل من مجموع الوظائف الإداريةِ التي تبدأ بالتخطيط ثم التنظيم ثم التوجيه ثم الرقابة، وترتبط هده الوظائف ببعضها البعض ارتباطا وثيمًا وبشكل تكاملي، إلا أن وظيفة الرقابة ترتبط بشكل رئيسي بعملية التخطيط لأن الوظيفة الرقابية تهدف إلى قياس ما تم إنجازه ومقارنته مع ما حددته الخطة من أهداف للتأكد من أن هذه الأهداف قد تحققت بجميع المواصفات الموضوعة وفقا لتسلسلها الزمني. وللرقابة أساليب ووسائل متعددة منها التقليدي كاستخدام الموازنات بأنواعها والنسب المالية، ومنها التخصصي كخارطة التعادل وخرائط جانت والأساليب الشبكية مثل طريقة المسار الصرج وطريقة بيرت اللتان تعدان من أهم الأساليب الحديثة في عملية التخطيط والرقابة وخاصة في المشاريع الكبيرة والتي يمكن تمثيلها بالرسم كمجموعة من الأنشطة المتكاملة والمتتابعة وغير المتداخلة زمنيا الواجب إنجازها من أجل تحقيق هدف محدد مسبقا.فمبدأ شبكة الأعمال قائم على أساس أن أي مشروع يجب تقسيمه إلى عدد من مراحل التتفية (أنشطة) المتتابعة زمنيا وفق تسلسل منطقي وبحيث ينتهي كل نشاط بحدث (Event). أي أن الأحداث في شبكة الأعمال والتي يُعبر عنها بدوائر تحدد نقاط تعاقب الأنشطة السابقة واللاحقة. فالدائرة تمثل نهاية زمن تنفيذ نشاط وبداية تنفيذ نشاط آخر باستثناء حدث البدء في المشروع الذي لا نشاط سابق له وحدث الانتهاء من العمل في المشروع حيث لا نشاط لاحق له. أما الأنشطة فهي فترة القيام الفعلي بالنشاط أي الوقت اللازم لإنجاز العمل الفعلي، ويشار لها بأسهم تربط بين الأحداث مبتدئة من حدث البداية وتنتهي عند حدث النهاية مروراً بالأحداث المختلفة المتتابعة وغير المتداخلة التي يتطلبها إنجاز المشروع.أي أنه بين كل حدثين يوجد نشاط واحد فقط، ويرصد الزمن الذي يستغرقه النشاط لإنجاز الحدث فوق السهم الدال

على هذا النشاط، وبالتالي يمكن تعريف شبكة الأعمال بأنها نموذج شكلي يوضح العلاقة بين الأحداث والأنشطة التي تربط بينهما في تتابع منطقي وذلك لتقدير الزمن اللازم لإنجاز كافة مراحل المشروع أو أي مرحلة منه من أجل تخفيض وقت التنفيذ الكلي له من خلال التركيز على تحسين الأداء في أنشطة المسارات الحرجة في الشبكات.

قواعد وأسس بناء شبكات الأعمال:

إن عملية رسم شبكة الأعمال تتطلب في البداية تجزئة المشروع إلى مجموعة من المراحل (الأنشطة) وتحديد التسلسل المنطقي والزمني لإنجاز هذه الأنشطة وفقاً للقواعد والأسس التالية:

1- تبدأ شبكة الأعمال بحدث واحد فقط هو حدث البداية الذي لا نشاط سابق له.

2- تنتهي شبكة الأعمال بحدث واحد فقط هو حدث النهاية الذي لا نشاط لاحق له.

3- يُمثل كل نشاط بسهم واحد فقط ويُشير رأس السهم إلى اتجاه إنسياب العمل وغالباً ما يكون النشاط واقع بين حدثين كما يلي:

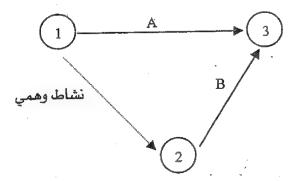
فالنشاط A واقع بين الحدثين 1 و 2.

4- لا يجوز ربط حدثين بأكثر من نشاط واحد كما يلي:

$$\begin{array}{ccc}
 & A \\
\hline
 & B \\
\hline
 & 2
\end{array}$$

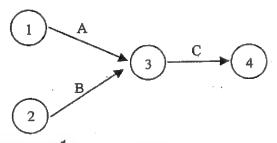
وذلك لأن انتهاء النشاطين A, B المبتدئين من حدث البداية عند حدث واحد يخالف قواعد بناء شبكات الأعمال التي تفترض وقوع كل نشاط بين

حدثين مستقلين وإن تتطلب الأمر إنجازهما في نفس الوقت مع اختلاف الزمن الذي يستفرقه كل نشاط، ولعلاج مثل هذه الحالة يتم استحداث نشاط وهمي على شكل سهم متقطع لا يخصص له وقت ولا إمكانات مادية لتميزه عن الأنشطة الحقيقية كما يلي:



والهدف من ذلك هو لتحقيق التتابع المنطقي في تسلسل تنفيذ الأحداث ولغرض الالتزام بالقواعد الأساسية في رسم شبكات الأعمال، فالنشاط A أصبح مساره (2-2).

5- لا يجوز البدء بنشاط جديد إلا بعد التأكد بأن جميع الأنشطة السابقة للنشاط المعني قد تم إنجازها.



B, A يمكن البدء بالنشاط C إلا بعد إنجاز النشاطين B, A مع ملاحظة أن النشاطين B, A قد بدأ معاً وإن طول السهم الممثل لأي نشاط ليس له أية دلالة.

| ال: | عث |
|-----|----|
|-----|----|

A, B, C, D, E,) إذا تطلب إنجاز مهمة معينة ثمانية أنشطة مختلفة هي (F, G, H) وأن الترتيب المنطقي للأنشطة هي كما يلي:

1- النشاط B يلي النشاط A والنشاط C يلي النشاط B.

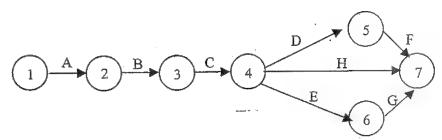
-2 النشاط E, D يمكن البدء بهما معا بعد إنهاء النشاط -2

3− النشاط F يتبع النشاط D والنشاط G يتبع E-

4− النشاط H يمكن أن يبدأ بعد النشاط C.

المطلوب: رسم شبكة الأعمال للنشاطات الثمانية التي تستوفي علاقات الترتيب أعلاه.

الحل:



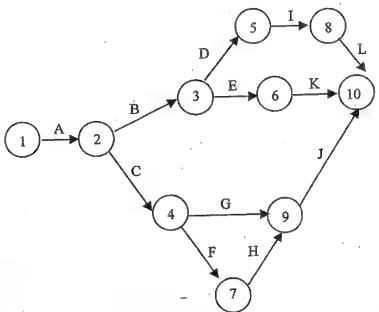
مثال2: الجدول التالي يظهر الأنشطة المختلفة والأنشطة السابقة لها التي يتطلبها إنجاز مشروع معين.

| النشاط السابق | النشاط |
|---------------|--------|
| - | A |
| A | В |
| A | C |
| В | D |
| В | E |

C F
C G
F
H
D I
G.H J
E K
I L

المطلوب: رسم شبكة الأعمال التي تستوفي علاقات الترتيب للنشاطات السابقة:

الحل:



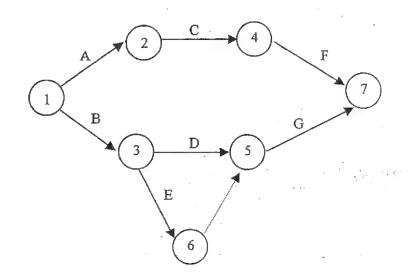
مثال 3: الجدول التالي يظهر الأنشطة والأنشطة السابقة لها التي يتطلبها إنجاز مشروع معين:

النشاط النشاط النابق النشاط النابق المنابق النشاط النابق المنابق المن

المطلوب: رسم شبكة الأعمال التي تستوفي علاقات الترتيب للنشاطات السابقة.

الحل:

حيث أن النشاط B, A ليس لهما أنشطة سابقة فهي إذاً نشاطات بداية يمكن تنفيذها في نفس الوقت كما يلي:



التحليل الزمني لشبكات الأعمال:

الهدف الأساسي لاستخدام التحليل الشبكي هو لتبيان أهمية الوقت في عملية إلإنجاز، وتوقع الأوقات اللازمة لإنجاز كل نشاط يعتمد على الطريقة المتبعة في تحليل الشبكة، وطرق التحليل الزمني لشبكات الأعمال هي:

.Critical Path Method (CPM) مطريقة المسار الحرج

Program Evaluation and Review : حطريقة تقييم ومراجعة البرامج Technique (PERT)

فإذا كانت الطريقة المستخدمة هي طريقة المسار الحرج فإن تقدير الوقت اللازم لإنجاز النشاط يحدد بشكل مؤكد أو حتمي أما إذا كانت الطريقة المستخدمة هي طريق (بيرت) فإن تقدير الوقت المتوقع لإنجاز النشاط يحدد بشكل احتمالي غير مؤكد معتمدة على ثلاثة أزمنة احتمالية هي:

أ- الزمن التفاؤلي.

ب- الزمن الأكثر احتمالاً.

ج-الزمن التشاؤمي.

1- طريقة المسار الحرج (CPM):

ذكرنا سابقاً بأن مبدأ شبكة الأعمال قائم على أساس أن أي مشروع يجب تقسيمه إلى عدد من مراحل التنفيذ (الأنشطة) المتتابعة زمنيا وفق تسلسل منطقي وبحيث ينتهي كل نشاط بحدث. فبعد رسم شبكة الأعمال بأحداثها ونشاطاتها والأوقات اللازمة لإنجاز كل حدث فيها يتم تحديد المسار الحرج من بين المسارات المختلفة في الشبكة وهو المسار الذي يستفرق أطول وقت زمني من بين المسارات في الشبكة والدي يشير إلى أقصر مدة زمنية ممكنة لإنجاز بين المسارات في الشبكة والدي يُشير إلى أقصر مدة زمنية ممكنة لإنجاز المشروع. أي أن الفترة الزمنية المتوقعة لإنجاز أي مشروع تساوي فترة المسار

وزمن هذا السار هو:

وزمن هذا السار هو:

24 = 5 + 12 + 7 أسبوعا

8 + 16 + 5 = 29 أسبوعاً

 $.(6-5) \leftarrow (5-2) \leftarrow (2-1)$

- المسار الثالث: ويشتمل على النشاطات التالية

 $(6-5) \leftarrow (5-3) \leftarrow (3-1)$

نلاحظ بعد استخراج أطوال جميع المسارات بأن المسار الثاني كان أطولها فهو إذاً المسار الحرج والذي يمثل الزمن الكلي للمشروع وهو 29 أسبوعاً. وبالتالي فإن الوقت الفائض للمسار الأول يساوي أسبوعاً واحداً وللمسار الثالث يساوي خمسة أسابيع والأنشطة الحرجة هي (1-2)، (2-5)، (5-6) وأي تأخير في إنجازها سيؤدي إلى زيادة المدة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع.

مثال: الجدول التالي يظهر عشرة أنشطة متتابعة يتطلبها إنجاز مشروع معين والزمن اللازم لإنجاز كل نشاط مقاس بالأشهر.

| 7-6 | 7-5 | 7-4 | 6-3 | 4-3 | 5-2 | 4-2 | 3-1 | 2-1 | 1-0 | الأنشطة |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------------|
| 8 | 2 | 5 | 7 | 3 | 3 | 6 | 10 | 8 | 2 | الفترة الزمنية |

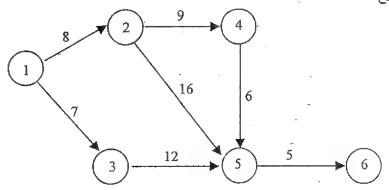
المطلوب:

1- رسم شبكة أعمال هذا المشروع.

2- تحديد كافة المسارات.

3- الزمن الكلي الذي يتطلبه إنجاز المشروع.

الحرج، والأنشطة الواقعة على المسار الحرج هي أنشطة حرجة أيضا وبالتالي فإن أي تأخير في أحدها سيؤدي إلى زيادة طول المسار الحرج أي زيادة المدة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع ككل. لذلك فإن اختصار فترة إنجاز المشروع يجب أن يتم على أساس اختصار فترة إنجاز النشاطات الحرجة. أما باقي النشاطات فهي نشاطات غير حرجة لأنها أقصر من المسار الحرج وبالتالي فهي تحتمل التأخير دون أن يؤدي ذلك إلى زيادة المدة الزمنية للمشروع. والفرق بين طول المسار الحرج وطول المسار غير الحرج يسمى بالوقت الفائض للمسار غير الحرج. وتعتبر هذه الطريقة أحد طرق احتساب المسار الحرج، وللمزيد من التوضيح نفترض شبكة الأعمال التالية علماً بأن زمن الأنشطة الواردة فيها بالأسابيع.



نلاحظ في هذه الشبكة وجود ثلاثة مسارات متحملة للشبكة وهي:

- المسار الأول: ويشتمل على النشاطات التالية:

$$(6-5) \leftarrow (5-4) \leftarrow (4-2) \leftarrow (2-1)$$

وزمن هذا السار هو:

$$28 = 5 + 6 + 9 + 8$$
 أسبوعا

- المسار الثاني: ويشتمل على النشاطات التالية:

المرور الأمامي (الأزمنة المبكرة):

تتطلب هذه الطريقة احتساب الزمن الكلي للمشروع ابتداءً من حدث البداية حتى حدث النهاية وذلك باستخراج زمن البداية المبكرة Early start وزيَّن النهاية المبكرة (ES) وزيَّن النهاية المبكرة (EF) المتناب ومن البداية المبكرة بأنه أدنى نقطة زمنية ممكنة للبدء في نشاط، ويعرف زمن البداية المبكرة بأنه أدنى نقطة زمنية ممكنة للانتهاء من نشاط، ويتم زمن النهاية المبكرة بأنه أدنى نقطة زمنية ممكنة للانتهاء من نشاط. ويتم احتساب زمن البداية والنهاية المبكرة للأحداث وفقاً للاحتمالات التالية:

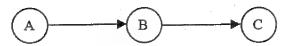
أ- عدم وجود حدث سابق.

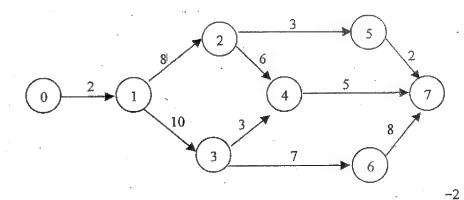
إذا كان الحدث (A) هو حدث بداية كما في الشكل التالي:

فهذا يعني أن لا نشاط سابق له وبالتالي فإن زمن البداية المبكرة لحدث البداية هذا يساوي صفراً. أما زمن النهاية المبكرة له فهو الزمن "t" الذي يستغرقه النشاط A كما يلي:

ب- وجود حدث واحد سابق.

في حالة وجود حدث واحد (B) سابق للحدث قيد الدرس (C) كما في الشكل التالي:





 $(7-5) \leftarrow (5-2) \leftarrow (2-1) \leftarrow (1-0)$ الأول الأول -15 = 2 + 3 + 8 + 2

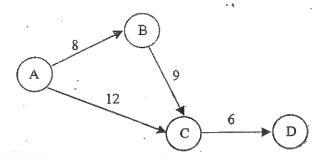
 $(7-4) \leftarrow (4-2) \leftarrow (2-1) \leftarrow (1-0) \rightarrow (4-2) -$ المسار الثاني 21 = 5 + 6 + 8 + 2

 $(7-6) \leftarrow (6-3) \leftarrow (3-1) \leftarrow (1-0)$ المسار انثانت = 8 + 7 + 10 + 2 شهراً

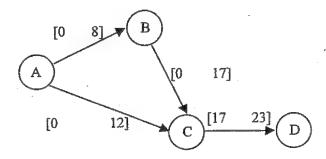
 $(7-4) \leftarrow (4-3) \leftarrow (3-1) \leftarrow (1-0)$ - المسار الرابع 20 = 5 + 3 + 10 + 2

3- الزمن الكلي للمشروع هو زمن المسار الحرج، والمسار الثالث هو المسار الحرج لأنه أطول المسارات، أي أن الزمن الكلي للمشروع هو 27 شهراً.

أما الطريقة الثانية التي تستخدم لحساب المسار الحرج وخاصة في نماذج المشاريع الكبيرة ذات المسارات الكثيرة والمعقدة فهي طريقة المرور الأمامي والمرور الخلفي.



فإن زمن البداية المبكرة للحدث (D) يساوي أكبر زمن نهاية مبكرة لوقوع الحدث (C) المتولدة من الأنشطة (A-C) و (B-C).



نلاحظ بان أكبر زمن نهاية مبكرة لوقوع الحدث (C) يساوي 17 وهو بالتالي زمن البداية المبكرة للحدث (D) وبالتالي فإن زمن النهاية المبكرة للحدث (D) يساوي 23.

المرور الخلفي (الأزمنة المتأخرة):

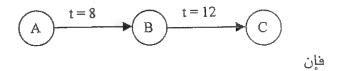
تتطلب هذه الطريقة احتساب الزمن الكلي للمشروع ابتداءً من حدث النهاية والسير بالاتجاه المعاكس حتى حدث البداية وذلك باستخراج زمن البداية المتأخرة (Latest Finish (LF) لكافة

فإن زمن البداية الميكر للحدث (B) يساوي زمن النهاية المبكر للحدث A. وزمن النهاية المبكر للحدث (B) يساوي زمن البداية المبكر للحدث (B) مضافاً إليها الزمن t الذي يستغرقه الحدث B.

$$ES_B = EF_A$$

$$EF_B = ES_B + t_B$$

فلو فضنا الشبكة التالية:



$$ES_A = 0$$

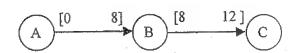
$$EF_A = ES_A + t$$

$$= 0 + 8 = 8$$

$$ES_B = EF_A = 8$$

$$EF_B = ES_B + t$$

$$= 8 + 12 = 20$$



ج- وجود أكثر من حدث سابق:

في حالة وجود أكثر من حدث سابق للحدث قيد الدرس، فإن زمن البداية المبكرة (ES) لهذا الحدث هو أكبر زمن نهاية (EF) لانتهاء أي من الأنشطة الداخلة فيه فلو فرضنا الشبكة التالية:

الأحداث في الشبكة. حيث يعرف زمن البداية المتأخرة بأنه أقصى نقطة زمنية للبدء بالنشاط دون أن يؤدي إلى تأخير في إنجاز الحدث حسب الوقت المحدد له. ويعرف زمن النهاية المتأخرة بأنه أقصى نقطة زمنية مسموح بها لإنهاء النشاط دون أن يؤدي إلى إطالة أمد إنجاز الحدث حسب الوقت المحدد له. ويتم احتساب زمن البداية والنهاية المتأخرة للأحداث وفقاً للاحتمالات التالية:

إذا كان الحدث (D) هو حدث النهاية كما في الشبكة السابقة فهذا يعني أن لا نشاط لاحق له وبالتالي فإن زمن النهاية المتأخرة (LF) له يساوي المدة الزمنية اللازية لإنجاز المشروع ككل أي يساوي زمن النهاية المبكرة (EF) للحدث (D) والمساوية (23). أي أن:

$$LF_D = EF_D = 23$$

وبالتائي يكون زمن البداية المتأخرة (LS) له هو زمن النهاية المتأخرة (LF) ناقصاً الزمن (t) الذي يستغرفه الحدث D.

$$LS = LF - t$$

= 23 - 6
= 17

LS = 17

ب- وجود حدث واحد لاحق.

في حال وجود حدث واحد (X) لاحق للحدث (W) قيد الدرس كما يلي:

$$w \longrightarrow x$$

قإن زمن النهاية المتأخرة لوقوع الحدث (W) يساوي زمن البداية المتأخرة لوقوع الحدث اللاحق (X).

$LF_{W} = LS_{X}$

علماً بأن زمن البداية المتأخرة للحدث (X) يساوي زمن النهاية المتأخرة للحدث (X) ناقص الزمن (t) الذي يستغرقه الحدث (X).

جـ وجود أكثر من حدث لاحق.

في حالة وجود أكثر من حدث لاحق للحدث قيد الدرس، فإن زمن النهاية المتأخرة (LF) لوقوع هذا الحدث هو أصغر زمن بداية متأخرة (LS) لأحد الأنشطة المتفرعة من ذلك الحدث.

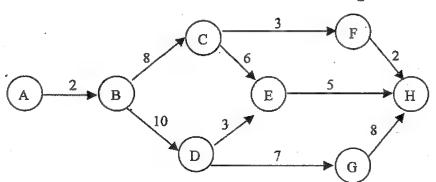
ومن حساب الأزمنة المبكرة والأزمنة المتأخرة ينتج زمن آخر يسمى الزمن الفائض ويتم التوصل إليه باستخدام إحدى الطرق التالية:

-1 الزمن الفائض للحدث = زمن البداية المتأخرة للحدث - زمن البداية المبكرة للحدث

2- الزمن الفائض للحدث = زمن النهاية المتأخرة للحدث - زمن النهاية المبكرة للحدث

والأنشطة التي زمنها الفائض يساوي صفر من بين كافة أنشطة الشبكة هي أنشطة حرجة تمثل في مجموعها المسار الحرج.

ولتوضيح حسابات الأزمنة المبكرة والمتأخرة نفترض شبكة الأعمال التالية:



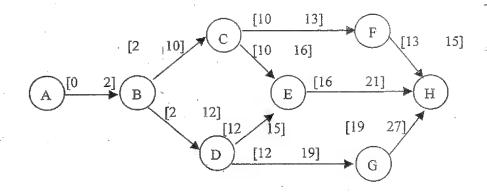
| | , | | | | | |
|----------|---------------|----|----|----|----|-------------|
| Activity | Activity time | ES | EF | LS | LF | Total Float |
| A-B | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| В-С | 8 | 2 | 10 | 8 | 16 | .6 |
| B-D | 10 | 2 | 12 | 2 | 12 | 0 |
| C-E | 6 | 10 | 16 | 16 | 22 | 6 |
| C-F | 3 | 10 | 13 | 22 | 25 | 12 |
| D-E | 3 | 12 | 15 | 19 | 22 | 7 |
| D-G | 7 | 12 | 19 | 12 | 19 | 0 |
| E-H | . 5 | 16 | 21 | 22 | 27 | 6 |
| F-H | 2 | 13 | 15 | 25 | 27 | 12 |
| G-H | 8 | 19 | 27 | 19 | 27 | 0 |

ومن هذا الجدول نلاحظ بان الأنشطة (A-B), (A-B), (B-D), (B-D) لها ومن هذا الجدول نلاحظ بان الأنشطة (A-B), (B-D), (A-B) لها وقت فائض كلي مساوي للصفر وبالتالي فهي أنشطة حرجة وأي تأخير في تنفيذ المشروع ككل عن الوقت المحدد، وعليه فإن المسار الحجر لهذه الشبكة هو $A \to B \to D \to G \to H$ أما باقي النشاطات في الشبكة فإن الوقت الفائض لها أكبر من الصفر وهي بذلك نشاطات غير حرجة يسمح بالتأخير في تنفيذها في حدود الفائض الموجود فيها.

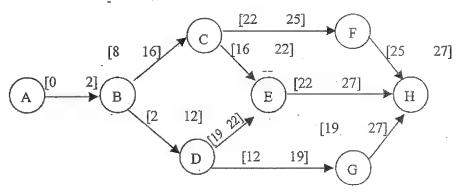
3- طريقة تقييم ومراجعة البرامج (PERT):

ذكرنا سابقاً بأن الهدف الأساسي لاستخدام التحليل الشبكي هو لإظهار أهمية الوقت في عملية الإنجاز. وتقدير الوقت المتوقع لإنجاز أي نشاط حسب طريقة بيرت يحدد بشكل احتمالي غير مؤكد بعكس طريقة المسار الحرج المعتمدة على الزمن المؤكد والثابت للنشاطات المتشابهة في المشروعات المختلفة

فإن زمن البداية المبكرة والنهاية المبكرة لهذه الشبكة هو كما يلي:



وزمن النهاية المتأخرة والبداية المتأخرة لها هو كما يلي:



ولتحديد المسار الحرج لهذه الشبكة علينا احتساب الوقت الفائض لكافة الأنشطة فيها من خلال حاصل الفرق بين البدايات المتأخرة والبدايات المبكرة أو من خلال الفرق بين التهايات المتأخرة والنهايات المبكرة كما في الجدول التالي:

| Activity | a | М | <u>b</u> |
|----------|-----|-----|----------|
| · A-B | 4 | 5 | 12 |
| A-C | 1 | 1.5 | • 5 |
| В-С | 2 | 3 | 4 |
| B-D | 3 | 4 | 11 |
| DE | 2 3 | | 4 |
| C-F | 1.5 | 2 | 2.5 |
| D-G | 1.5 | 3 | 4.5 |
| E-G | 2.5 | 3.5 | 7.5 |
| EC | 1.5 | 2 | 2.5 |
| G-H | 1.5 | 2 | 3 |

المطلوب:

1- احسب الوقت المتوقع بالأسبوع لكل نشاط.

2- ارسم شبكة بيرت وحدد المسار الحرج.

الحل:

1- لو أخذنا النشاط الأول ذو المسار (A-B) كمثال، سنلاحظ بان هذا النشاط يتطلب (4) أسابيع في الظروف الأكثر تفاؤلاً و (12) أسبوع في الظروف الأكثر تشاؤماً و (5) أسابيع في الظروف الاعتيادية. وبالتالي فإن المتوسط الحسابي لهذا النشاط هو:

Et =
$$\frac{a+4M+b}{6} = \frac{4+(4)(5)+12}{6} = \frac{36}{6} = 6$$
 weeks

المتأتي من توفر المعلومات والخبرات السابقة نتيجة لتكرارها، فطريقة بيرت تلائم المشروعات الجديدة غير المتكررة التي بصعب فيها وضع تقدير دقيق للزمن اللازم لإنهاء كل نشاط لعدم توفر معلومات وخبرات سابقة، لهذا فهي تعتمد على ثلاثة تقديرات للوقت اللازم لإنجاز النشاطات هي:

1- الزمن التفاؤلي Optimistic time.

وهو الزمن الأدنى المتوقع لتنفيذ النشاط على اعتبار أن كافة الأمور في المشروع تسير على ما يرام وبنفس الإمكانات المتاحة ويرمز له بالرمز (a).

2- الزمن الأكثر احتمالا Most Probable time!

وهو الزمن الطبيعي المتوقع لتنفيذ النشاط في الظروف والأحوال الاعتيادية ويرمز له بالرمز (M).

3- الزمن التشاؤمي Pessimistic time:

وهو الزمن الأعلى المتوقع لتنفيذ النشاط في الظروف السيئة والمعوقات التي تؤخر خطوات التنفيذ ويرمز له بالرمز (b).

ومن هذه التقديرات الثلاثة لزمن كل نشاط يتطلب أسلوب بيرت احتساب متوسط حسابي لهم وفق توزيع بيتا يطلق عليه الزمن المتوقع لكل نشاط في الشبكة وفقاً للمعادلة التالية:

Expected time (Et) =
$$\frac{a + 4M + b}{6}$$

وبعد استخراج الزمن المتوقع لكل نشاط حسب المعادلة أعلاه، نرسم شبكة بيرت ثم نحدد أطول المسارات فيها ليمثل المسار الحرج. أي أن المسار الحرج لشبكة بيرت هو مجموع الأزمنة المتوقعة للأنشطة الحرجة المكونة له.

مثال: الجدول التالي يظهر عشرة أنشطة متتابعة يتطلبها إنجاز مشروع معين والزمن اللازم لذلك بالأسابيع:

- المسار الثالث:

$$(\text{H--G}) \leftarrow (\text{G--F}) \leftarrow (\text{F--C}) \leftarrow (\text{C--B}) \leftarrow (\text{B--A})$$

وزمن هذا السار هو:

أسبوعا
$$17 = 2 + 2 + 4 + 3 + 6$$

- المسار الرابع:

$$(H-G) \leftarrow (G-F) \leftarrow (F-C) \leftarrow (C-A)$$

وزمن هذا المسار هو:

$$10 = 2 + 2 + 4 + 2$$
 أسابيع

وحيث أن أطول المسارات هو المسار الثالث فهو إذاً المسار الحرج ذو الوقت المتوقع (17) أسبوعاً الذي يمثل الزمن الكلي لإنجاز المشروع ككل.

تباين الأنشطة الحرجة:

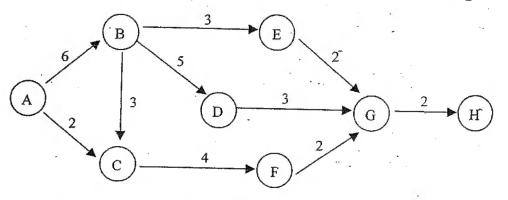
لا تكمن أهمية أسلوب بيرت في تحديد المسار الحرج لإنجاز المشروع فقط وإنما في إيجاد الاحتمالات المختلفة لإنجاز المشروع بأزمنة تختلف عن الزمن المتوقع له. وذلك بالاعتماد على التوزيع الطبيعي Normal distribution والذي يتطلب تحديد عدد الانحرافات المعيارية (Z) الواقعة بين الزمن المحدد من قبل إدارة المشروع والزمن المتوقع لتنفيذ المشروع لتحديد المساحة الواقعة تحت المنعنى الطبيعي من جدول التوزيع الطبيعي والتي تمثل احتمال إنجاز المشروع في الزمن المحدد. ويتم تحديد عدد الانحرافات المعيارية باستخدام العلاقة التالية:

الانحراف المياري لأزمنة النشاطات الحرجة

وباستخدام نفس الأسلوب، فإن الوقت المتوقع لباقي النشاطات يظهر كما في الجدول التالي:

| Activity A-B A-C B-C B-D B-E C-F D-G E-G F-G | | 1 | | } | | | | | | 1 | _ |
|--|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| (Ft) 6 2 2 6 1 2 1 1 1 | Activity | A-B | A-C | B-C | B-D | B-E | C-F | D-G | E-G | F-G | G-H |
| | (Et) | 6 | 2 | 3 | 5 | 3 | 4 | 3 | 2 | . 2 | 2 |

-2



ولتحديد المسار الحرج في هذه الشبكة علينا في البداية تحديد كافة المسارات المحتملة فيها والزمن الذي يستغرق كل مسار، والمسار الذي يستغرق أطول وقت زمني هو المسار الحرج.

- المسار الأول: ويشتمل على النشاطات التالية:

$$(H-G) \leftarrow (G-E) \leftarrow (E-B) \leftarrow (B-A)$$

وزمن هذا المسار هو:

$$13 = 2 + 2 + 3 + 6$$

- المسار الثاني:

$$(H-G) \leftarrow (G-D) \leftarrow (D-B) \leftarrow (B-A)$$

وزمن هذا السار هو:

ومن جدول المساحات الواقعة تحت المنحنى الطبيعي، نجد أن نسبة المساحة الواقعة تحت القيمة المعيارية (1.38) هي:

 $P(Z \le 1.38) = 0.9162$ وهي تمثل احتمال تنفيذ المشروع خلال (19) إسبوعاً.

شكات الأعمال =

ولتوضيح هذه الطريقة، نعود إلى المثال السابق ونطلب إيجاد احتمال تنفيذ المشروع خلال 19 أسبوعاً أو أقل مثلاً.

الحل:

في البداية علينا استخرج التباين لكل نشاط حرج في الشبكة من خلال قانون التباين السابق، والجدول التالي يبين تباينات الأنشطة الحرجة.

| H-G | G-F | F-C | С-В | B-A | الأنشطة الحرجة |
|------|-------|-------|------|------|----------------|
| 0.12 | 0.028 | 0.028 | 0.12 | 1.78 | التباين |

الانحراف المعياري لأزمنة النشاطات الحرجة

$$0.12 + 0.028 + 0.028 + 0.12 + 1.78 = 2.076 = 1.44 =$$

احتمال تنفيذ المشروع خلال 19 أسبوعاً أو أقل هو:

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma} = \frac{19 - 17}{1.44} = 1.38$$

الزاجع



1- الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية.

د. حسين اللطيف السامرائي - عمان دار الهلال.

2- بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المشأة.

د. على حسين على وآخرون -عمان دار زهران.

3- مقدمة في بحوث العمليات

- ... محمد الطراونة و د. سليمان عبيدات - 1989.

4- بحوث العمليات تضبيتات وخوارزميات

د. موفق محمد الكبيسي- عمان / دار الحامد 1999.

5- بجوث العمليات - نظرية وتطبيق

د. فؤاد الشيخ سالم - عمان دار مجدلاوي 1983.

6- بحوث العمليات

د.صباح الدين بقجة جي وأخرون - منشورات جامعة دمشق 1999.

7- الأساليب الكمية في الإدارة

د.منعم زمزير الموسوي - مؤسسة زهران 1996.

8- بحوث العمليات في التطبيق الاقتصادي

د. محمد فخري مكي - مصر - دار السعادة للطباعة 1999.

9- Problems in operation Research Dr. D.S. HIRA S. CHAND & Company LTD - New Delhi-1997.



